

Lista 4

1. Niech $X \sim B(40, \frac{1}{2})$. Wyznacz dokładnie wartość $P(X=20)$ oraz przybliż to prawdopodobieństwo używając centralnego tw. granicznego.
2. Niech $X \geq 0$. Udowodnij nierówność Markowa/Czebyszewa

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{EX}{\varepsilon}$$
3. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami a i b .
 - (i) jaki jest rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu?
 - (ii) jakie jest prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy?
4. Podaj przykład zmiennych losowych zależnych i nieskorelowanych.
5. Zmienna losowa X i Y są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy. Znajdź rozkład $X-Y$.
6. Korzystając z mocnego prawa wielkich liczb zaproponuj metodę aproksymacji całki $\int_0^1 f(x) dx$ metodą Monte Carlo.
7. Korzystając z mocnego prawa wielkich liczb znajdź pierwszy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$
8. Zmienna losowa X_n ma rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody. Do czego zbiega $\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$ gdy $n \rightarrow \infty$?
9. Zmienna X_1, X_2, \dots są iid over $EX_i = 0, \text{Var} X_i = 1$.
Wybrać z nich:
 - (i)
 - (ii)

$$(i) \frac{\sqrt{n}(X_1 + \dots + X_n)}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$

$$(ii) \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$