Lista 6

1. Rozkład wektora (X,Y) zadany jest przez

	$X=1$	$X=3$
$Y=0$	0,2	0,3
$Y=2$	0,1	0,4

Znajdź EX oraz $E(X|\sigma(Y))$.

Wskazówka: $\sigma(Y)$ jest σ-ciałem generowanym przez partycję $A_1=\{Y=0\}$, $A_2=\{Y=2\}$.

2. Niech $\Omega=[0,1]$ oraz P - miara Lebesgue'a na $[0,1]$ (całkowanie jak na analizie matematycznej $\int_\Omega f\,dP=\int_0^1 f(x)\,dx$). Policz $E(f|\mathcal{F})$ gdzie $f(x)=\sqrt{x}$ oraz $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez partycję $[0,\frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4},1]$.

3. Pokaż, że jeśli X jest $\mathcal{F}$-mierzalna, to $E(X|\mathcal{F})=X$.

4. Pokaż, że $E(E(X|\mathcal{F}))=EX$

5. Pokaż, że $E(aX+bY|\mathcal{F})=aE(X|\mathcal{F})+bE(Y|\mathcal{F})$

6. Pokaż, że jeśli $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2$ to
$$E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2)=E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)=E(X|\mathcal{F}_1)$$

7. Pokaż, że jeśli X jest niezależne od $\mathcal{F}$ to $E(X|\mathcal{F})=EX$

8. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi iid. Policz $E(X|X+Y)$

9. Pokaż, że jeśli (X,Y) ma gęstość $\rho(x,y)$ to
$$E(\varphi(X)|Y)=\frac{\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\rho(x,Y)\,dx}{\int_{\mathbb{R}}\rho(x,Y)\,dx}$$

10. Niech $\rho(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right)$. Policz $E(X|Y)$.