Lista 7

1. Niech $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ będą σ-ciałami. Pokaż, że $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ jest σ-ciałem.

2. Niech 2^X będzie rodziną wszystkich podzbiorów przestrzeni X. Pokaż, że 2^X jest σ-ciałem.

3. Niech $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem funkcji mierzalnych. Pokaż, że $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ też jest funkcją mierzalną.

4. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Pokaż, że

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) jeśli $A, B \subseteq \mathcal{F}$, $A \subseteq B$, to $\mu(A) \leq \mu(B)$

(iii) Niech $A_i \in \mathcal{F}$, $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$. Wtedy
$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

5. Niech $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ będą funkcjami prostymi mierzalnymi. Pokaż, że
$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu .$$

6. Niech $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ będą mierzalne. Pokaż, że

(i) jeśli $f \leq g$ to $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$

(ii) jeśli $f \equiv 0$ to $\int_X f\, d\mu = 0$

(iii) jeśli $A \in \mathcal{F}$ i $\mu(A) = 0$ to $\int_A f\, d\mu = 0$.

7. Niech $f, g \in L_1(\mu)$. Pokaż, że

(i) $$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$$

(ii) $$\int_X (c f)\, d\mu = c \int_X f\, d\mu, \quad c \in \mathbb{R}.$$