Analiza Matematyczna I

Lista 1

Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry i niech $a \in \mathbb{R}$. $a = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x\in A} \quad x \leq a \qquad \text{oraz} \qquad \forall_{\mathbb{R}\ni x<a} \quad \exists_{y\in A} \quad x < y \leq a.$$

Analogiczną własność można sformułować dla kresu dolnego.

Zad. 1. Wyznaczyć $\max A$, $\min A$, $\sup A$ i $\inf A$ w przypadku gdy

- a) $A = (-\infty, -1] \cup [0, 100)$;
- b) $A = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m \leq 2n\right\}$;
- c) $A = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}, \right\}$;
- d) $A = \left\{\frac{10^n}{n!} : n \in \mathbb{N}, \right\}$;
- e) $A = \{0.2, 0.22, 0.222, \ldots\}$.

Zad. 2. Dla niepustych zbiorów liczb rzeczywistych $A, B \subset \mathbb{R}$ rozważmy zbiór

$$A + B = \{z : z = x + y \quad \wedge \quad x \in A \quad \wedge \quad y \in B\}.$$

Wykazać, że $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Sformułować analogiczną własność kresu dolnego.

Zad. 3. Dla niepustych zbiorów liczb rzeczywistych dodatnich $A, B \subset \mathbb{R}$ rozważmy zbiór

$$A \cdot B = \{z : z = x \cdot y \quad \wedge \quad x \in A \quad \wedge \quad y \in B\}.$$

Wykazać, że $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$. Sformułować analogiczną własność kresu dolnego.

Zad. 4. Wykazać, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ i $b - a > 1$, to odcinek otwarty (a, b) zawiera liczbę całkowitą (np. $[a] + 1$ - przypomnieć definicję i własności części całkowitej liczby rzeczywistej).

Zad. 5. Udowodnić, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, to odcinek otwarty (a, b) zawiera liczbę wymierną i liczbę niewymierną. Wywnioskować stąd, że w każdym przedziale otwartym (a, b) leży nieskończenie wiele liczb wymiernych i nieskończenie liczb niewymiernych.

Zad. 6. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że

- a) $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;
- b) (nierówność Bernoulliego) $(1+x)^n > 1 + nx$, gdy $1 < n \in \mathbb{N}$, $-1 < x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (przy jakich założeniach mamy słabą nierówność?);
- c) $1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;
- d) $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$;
- e) dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11;
- f) (wzór Newtona) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 7. Znaleźć te wyrazy rozwninięcia dwumianu $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$, które są liczbami naturalnymi.

Zad. 8. Znaleźć te wyrazy rozwninięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, które nie zawierają x.

Zad. 9. Obliczyć poniższe sumy

- a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;
- b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;
- c) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$;
- d) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.