Analiza Matematyczna I

Lista 2

Zad. 1. Sprawdzić ograniczoność (z góry, z dołu) następujących ciągów liczbowych:

- a) $x_n = \sqrt{4n^2 - n} - 2n$;
- b) $x_n = \frac{(n+1)!}{n!+100}$;
- c) $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.

Zad. 2. Sprawdzić monotoniczność następujących ciągów liczbowych:

- a) $x_n = 5^n - 3^n - 2^n$;
- b) $x_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$;
- c) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n}$.

Zad. 3. Niech $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = g > 0$ i $\lambda \in (0, g)$. Wykazać, że istnieje takie n_0, że $x_n > \lambda$ dla dowolnego $n > n_0$. Sformułować podobne twierdzenie dla $g < 0$.

Zad. 4. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = g$ i $x_n \geq 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że gdy $k \in \mathbb{N}$ i $k \geq 2$, to

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{g}.$$

Zad. 5. Korzystając z twierdzenia o 3 ciągach obliczyć granice ciągów:

- a) $x_n = \frac{[nx]}{n}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$;
- b) $y_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$;
- c) $z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Zad. 6. Obliczyć granice ciągów o wyrazach ogólnych postaci

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Zad. 7. Pokazać, że jeśli ciąg liczbowy (n_k) ma wyrazy dodatnie i $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, to

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Skorzystać z tego twierdzenia i obliczyć granice następujących ciągów:

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n+1}.$$

Zad. 8. Obliczyć granice ciągu liczbowego (x_n), jeśli

- a) $x_n = \sqrt[3]{n^2+n^3} + \sqrt[3]{n^2-n^3}$;
- b) $x_n = \sqrt[4]{n^4+n^3} - n$;
- c) $x_n = \sqrt[2n+1]{3n+2}$;
- d) $x_n = \frac{99^n-2^n}{100^n-99^n}$;
- e) $x_n = 5^n - 3^n - 2^n$;
- f) $x_n = \sqrt{5^n - 3^n - 2^n}$;
- g) $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$;
- h) $x_n = \log_{2^n+1}(4^n+1)$;
- i) $x_n = \frac{n+1}{n^2(\ln(n+1)-\ln n)}$;
- j) $x_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

Zad. 9. Wykazać, że poniższe ciągi są monotoniczne i ograniczone:

- a) $x_n = \frac{n!}{n^n}$;
- b) $y_0 > 0$ i $y_n = \frac{y_{n-1}}{a+y_{n-1}}$ dla $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$.

Obliczyć ich granice, jeśli są zbieżne. Wykonaj to samo polecenie, ale bez obliczania granic dla ciągów:

- c) $z_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;
- d) $w_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

Zad. 10. Wykazać, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym i obliczyć jego granicę, jeśli

- a) $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = \sqrt{\frac{5}{16} + x_n}$ dla $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$;
- b) $x_1 > 0$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ dla $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Zad. 11. Załóżmy że $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ oraz $x_0 = \sup E \notin E$. Dowieść, że istnieje ciąg rosnący złożony z elementów zbioru E zbieżny do x_0.

Zad. 12. Sprawdzić czy ciąg liczbowy (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli

- a) $x_n = \frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2x}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos nx}{n \cdot (n+1)}$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- b) $x_n = \frac{1}{\log_2 2} + \frac{1}{\log_2 3} + \ldots \frac{1}{\log_2 n}$;
- c) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots a_n q^n$, gdzie $|q| < 1$ oraz $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < M$.

Który z ciągów jest zbieżny?

Zad. 13. Wyznaczyć granice górne i dolne następujących ciągów liczbowych:

- a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$;
- b) $y_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$;
- c) $z_n = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n}$.

Zad. 14. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym i niech $b_k = a_{2k}$, $c_k = a_{2k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{k \to +\infty} b_k = \lim\limits_{k \to +\infty} c_k = g$ (gdzie g jest tu granicą właściwą lub niewłaściwą), to $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = g$.

Zad. 15. Niech (a_n) będzie ciągiem monotonicznym zawierającym podciąg (a_n) taki, że $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = g$. Wykazać, że $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = g$.