Analiza Matematyczna I

Lista 3

Zad. 1. Wyznaczyć ciągi sum częściowych szeregów, a następnie sprawdzić ich zbieżność:

- a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$;
- b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$;
- c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;
- d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Zad. 2. Wyjaśnić dlaczego poniższe szeregi są rozbieżne

- a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(-1)^n}$;
- b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$;
- c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right)$.

Zad. 3. Posługując się kryteriami zbieżości, zbadać zbieżność szeregów liczbowych

- a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;
- b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt[3]{\sin\frac{1}{n}}$;
- c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{(-1)^n-n}$;
- d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;
- e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\sin\frac{1}{n}$;
- f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\cos\frac{1}{n}$;
- g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n-3^n-2^n}$;
- h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2,8)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Zad. 4. Posługując się warunkiem koniecznym zbieżności szeregu wykazać, że

- a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n n!}{(2n)^n} = 0$;
- b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+10}{3n+10}\right)^n = 0$.

Zad. 5. Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem monotonicznym zmierzającym do zera. Skorzystać z kryterium Dirichleta i zbadać zbieżność poniższych szeregów w zależności od wartości $x \in \mathbb{R}$

- a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$;
- b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$;
- c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}$.

Zad. 6. Pokazać, że jeśli szeregi liczbowe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to szeregi

- a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$;
- b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$;
- c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

także są zbieżne bezwzględnie. Czy zbieżność szeregu $\sum\limits_{i=1}^{n} a_n$ implikuje zbieżność szeregu a_n^2?

Zad. 7. Który z poniższych szregów jest zbieżny bezwględnie, a który warunkowo:

- a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$;
- b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4}{3^n}$;
- c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$?

Zad. 8. Załóżmy, że szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ spełnia założenia kryterium Leibniza. Niech

$$s_n = c_1 - c_2 + c_3 - \ldots + (-1)^{n+1} c_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że dla dwolnych $p, q \in \mathbb{N}$ suma szeregu s spełnia nierówność $s_{2p} \leq s \leq s_{2q-1}$. Wywnioskować stąd, że $|s - s_n| \leq c_{n+1}$, gdy $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 9. Ile pierwszych wyrazów szeregu należy wziąć, aby ich suma różniła się od sumy szregu mniej niż 10^{-1} lub 10^{-2}, gdy

- a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;
- b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$?

Zad. 10. Na przykładzie szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2+(-1)^n}{n}$$

pokazać, że założenie $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \ldots$ w kryterium Leibnitza jest istotne.

Zad. 11. Podać przykłąd dwóch szeregów rozbieżnych, których iloczyn Cauchy'ego jest szeregiem zbieżnym.