Analiza Matematyczna I

Lista 5

Zad. 1. Obliczyć pochodną funkcji f zadanej wzorem

- a) $\sqrt{x-\sqrt{3x+4}}$;
- b) $\arccos\sqrt[3]{1-x}$;
- c) $\ln(\operatorname{arctg} x)+\operatorname{arctg}(\ln x)$;
- d) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;
- e) $2^{\ln x}+\log_2 x$;
- f) x^x;
- g) $(\sin x)^{\cos x}$;
- h) $\log_x 2$;
- i) $\log_x(4-x^2)$;
- j) $\arcsin(\sin x)$;
- k) $\arcsin(\cos x)$.

Zad. 2. Dla $n\in\mathbb{N}$, funkcja f_n określona jest następująco

$$f_n(x)=x^n\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\qquad \text{dla } x\neq 0 \text{ i } f_n(0)=0.$$

Dla jakich wartości n funkcja f_n ma pochodną w punkcie $x=0$? Czy pochodna jest ciągła w tym punkcie? Dla jakich wartości n funkcja f_n ma pochodne jednostronne w punkcie $x=0$?

Zad. 3. Dla $n\in\mathbb{N}$, funkcja f_n określona jest następująco

$$f_n(x)=x^n\sin\frac{1}{x}\qquad \text{dla } x\neq 0 \text{ i } f_n(0)=0.$$

Dla jakich wartości n funkcja f_n jest różniczkowalna, dwukrotnie różniczkowalna? Dla jakich wartości n funkcja f_n jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$?

Zad. 4. Udowodnić, że jeśli funkcja f ma ograniczoną pochodną na pewnym przedziale I, to jest na tym przedziale ciągła jednostajnie.

Zad. 5. Załóżmy, że istnieją stałe $0<M\in\mathbb{R}$ i $a\in\mathbb{R}$ takie, że $\forall_{x>a}\quad f''(x)>M$. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Zad. 6. Skorzystać z Twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej i udowodnić nierówności

- a) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, gdy $x>0$;
- b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$, gdy $0<\alpha<\beta<2$.

Zad. 7. Skorzystać z Twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej i udowodnić nierówność

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \qquad \text{dla } x \neq 0.$$

Wskazówka: Wziąć $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = 2$.

Zad. 8. Skorzystać z Twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej oraz zadania poprzedniego i udowodnić nierówność

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x \qquad \text{dla } x > 0.$$

Zad. 9. Sporządzić wykres funkcji h, jeśli

- a) $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$;
- b) $h(x) = \frac{1}{4}\left(2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Zad. 10. Wykazać, że równania

- a) $x^3 + 3x^2 + 3x - 1000 = 0$;
- b) $3x^5 + 50x^3 + 135x + 100 = 0$

posiadają dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Zad. 11. Stosując w obliczeniach regułę de L'Hospitala, obliczyć granicę

- a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x^2-1}$;
- b) $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$;
- c) $\lim\limits_{x \to 1} x^{1/(1-x)}$;
- d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$;
- e) $\lim\limits_{x \to 1+} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{x}{1-x}\right)$.

Zad. 12. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2\sin x}{x + 3\sin x}.$$

Czy w obliczeniach można zastosować regułę de L'Hospitala?

Zad. 13. Znaleźć $f^{(n)}(x)$, jeśli

- a) $f(x) = \cos(ax)$;
- b) $f(x) = \cos^2 x$;
- c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Zad. 14. Załóżmy, że funkcje f i g są n-krotnie różniczkowalne na przedziale I. Udowodnić wzór Leibniza dla pochodnej iloczynu tych funkcji, tzn.

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \qquad x \in I.$$

Zad. 15. Sprawdzić, że dla funkcji $f(x) = \arcsin x$ prawdziwy jest wzór

$$(1 - x^2) f''(x) = x f''(x) \qquad \text{dla } x \in (-1, 1).$$

Stosując do obu stron tej relacji wzór Leibniza obliczyć $f^{(n)}(0)$ dla $n > 2$.

Zad. 16. Wyznaczyć wzór Taylora dla funkcji $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$ z punktem bazowym $x_0 = 2$ i z resztą R_1, R_2 i R_3. Czy można przeprowadzić podobne rachunki dla $x_0 = 0$?

Zad. 17. Wyznaczyć wzór Taylora dla funkcji

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

z punktem bazowym $x_0 = 1$ i z n-tą resztą.

Zad. 18. Ocenić błąd jaki popełniamy przyjmując, że

- a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ dla $|x| \leq 0.1$;
- b) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ dla $|x| \leq 0.5$.

Zad. 19. Obliczyć

- a) $\ln 1.1$ z dokładnością do 0.001;
- b) $\sqrt[3]{0.95}$ z dokładnością do 10^{-4}.

Zad. 20. Korzystając z wzoru Taylora funkcji $f(x) = \sqrt{(x+1)^3}$, udowodnić nierówności

- a) $\sqrt{(x+1)^3} > 1 + 3\frac{x}{2} + 3\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$ dla $x > 0$;
- b) $\sqrt{(x+1)^3} < 1 + 3\frac{x}{2} + 3\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + 3\frac{x^4}{128}$ dla $x > 0$.

Zad. 21. Wykazać, że jeśli f jest funkcją n-krotnie różniczkowalną na $\mathbb{R}$ i $f^{(n)}(x) = 0$ w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, to f jest wielomianem stopnia $n - 1$.

Zad. 22. Wyznaczyć ekstrema lokalne, największą i najmniejszą wartości funkcji f na podanym zbiorze

- a) $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) e^{-x}$, $\mathbb{R}$;
- b) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $[-1, 1]$;
- c) $f(x) = x^4 \ln x$, $(0, e]$.

Zad. 23. Zbadać wypukłość (wklęsłość) i punkty przegięcia wykresu funkcji

- a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$;
- b) $g(x) = |x|e^{-3x^2/2}$.

Zad. 24. Wykazać, że punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = x \sin x$ leżą na krzywej $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

Zad. 25. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji:

- a) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$;
- b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Zad. 26. Na gałęzi hiperboli

$$y = \frac{1}{x}$$

leżącej w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych wyznaczyć punkt, z którego przedział $[0, 1]$ leżący na osi OX widać pod największym kątem.

Zad. 27. Niech f będzie funkcją wypukłą na przedziale I a g funkcją wypukłą i rosnącą na przedziale J i $f(I) \subset J$. Wykazać, że funkcja złożona $g \circ f$ jest wypukła na I.

Zad. 28. Dowieść, że jeśli f jest funkcją wypukłą na przedziale I, to

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ i $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_n \geq 0$ takich, że $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Zad. 29. Skorzystać z zadania poprzedniego i wypukłości funkcji $f(x) = -\ln x$ wykazać, że

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (tzn.: średnia harmoniczna $\leq$ średnia geometryczna $\leq$ średnia arytmetyczna).