

# Analiza Matematyczna I

## Lista 6

Zad. 1. Zbadać czy funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  posiada funkcję pierwotną, jeśli

- a)  $f(0) = 0$  i  $f(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$  dla  $0 \neq x \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Czy to są funkcje ciągłe?

Zad. 2. Wyznaczyć całki nieoznaczone

- a)  $\int e^{|x|} dx$ ;
- b)  $\int \max\{1, x^2\} dx$ .

Wskazać te funkcje pierwotne  $F$ , które spełniają warunki  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 2$ .

Zad. 3. Wyznaczyć całki nieoznaczone

- a)  $\int (x^3 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$ ;
- b)  $\int \frac{a^{3x}-1}{a^x-1} dx$  ( $0 < a \neq 1$ );
- c)  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ .

Zad. 4. Całkując przez części, wyznaczyć całki nieoznaczone

- a)  $\int \arccos x dx$ ;
- b)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ ;
- c)  $\int x^2 \arccos x dx$ ;
- d)  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ ;
- e)  $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ .

Zad. 5. Całkując przez podstawienie, wyznaczyć całki nieoznaczone

- a)  $\int x^2 \sqrt[4]{1+x} dx$ ;
- b)  $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ ;
- c)  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$ ;
- d)  $\int \frac{x^3}{x^4-x^2+1} dx$ ;
- e)  $\int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+a^2} dx$ .

Zad. 6. Stosując różne metody całkowania, wyznaczyć całki nieoznaczone

- a)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ ;
- b)  $\int \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} dx$ ;
- c)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} dx$ ;
- d)  $\int \cos(1 + \sqrt{x}) dx$ ;
- e)  $\int x^3 e^{x^2} dx$ .

Zad. 7. Wyprowadzić wzory rekurencyjne dla całek

- a)  $I_n = \int x^n e^x dx$ ;
- b)  $J_n = \int x^\alpha (\ln x)^n dx$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq -1$ ;
- c)  $K_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx$ .

Korzystając z otrzymanych wzorów, obliczyć te całki dla  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Zad. 8. Wyznaczyć całki nieoznaczone funkcji wymiernych

- a)  $\int \frac{(3x-3)}{x^3+3x+4} dx$ ;
- b)  $\int \frac{1}{x^4+1} dx$ ;
- c)  $\int \frac{1}{x^3-1} dx$ ;
- d)  $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$ ;
- e)  $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$ .

Zad. 9. Wyznaczyć całki nieoznaczone funkcji niewymiernych

- a)  $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^5}} dx$ ;
- b)  $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$ ;
- c)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+1}} dx$ ;
- d)  $\int \sqrt{x^2-x} dx$ .

Zad. 10. Wyznaczyć całki nieoznaczone funkcji trygonometrycznych

- a)  $\int \frac{\cos^3}{1+\sin^2 x} dx$ ;
- b)  $\int \frac{1}{1+3 \cos x} dx$ ;
- c)  $\int \frac{1}{\cos x} dx$ ;
- d)  $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$ ;
- e)  $\int \frac{(1-\cos 2x)^2}{(1+\cos 2x)^3} dx$ ;
- f)  $\int \sqrt{1+\sin 2x} dx$ .

Zad. 11. Wyznaczyć całki nieoznaczone funkcji trygonometrycznych

- a)  $\int \sin 3x \sin 2x dx$ ;
- b)  $\int \sin 3x \cos 12x dx$ ;
- c)  $\int \cos 13x \cos 12x dx$ .