Procesy stochastyczne

Lista 2

We wszystkich zadaniach $N = N_t$ to proces Poissona o intensywności λ; $B = B_t$ to standardowy ruch Browna, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t = [B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^n]$ to wielowymiarowy ruch Browna.

Zadania oznaczone **T** są trudniejsze.

Wzór Itô dla procesu Itô. Niech X_t spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t,$$

a funkcja $f(t,x)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe $\partial_t f, \partial_x f, \partial_{xx} f$. Wtedy proces $Y_t = f(t, X_t)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}\big(f(t,X_t)\big) = \partial_t f(t,X_t)\mathrm{d}t + \partial_x f(t,X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,X_t)\mathrm{d}\langle X\rangle_t,$$

gdzie wahanie kwadratowe procesu X jest równe $\mathrm{d}\langle X\rangle_t = \sigma^2(t,X_t)\mathrm{d}t$. W szczególności $\mathrm{d}\langle B\rangle_t = \mathrm{d}t$.

Zad. 1. Sprawdź, jakie są różniczki procesów

a) $aB_t + b$ dla pewnych stałych a, b,

b) e^{B_t},

c) $\sin(B_t)$.

Zad. 2. Sprawdź, jakie są różniczki procesów

a) $(B_t)^2$,

b) $\big(B_t - 1\big)^3$,

c) $\frac{1}{B_t + c}$.

Zad. 3. Znajdź rozwiązania stochastycznych równań

a) $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}t + 2\sqrt{X_t}\mathrm{d}B_t$,

b) $\mathrm{d}X_t = \frac{1}{2}X_t\mathrm{d}t + X_t\mathrm{d}B_t$,

c) $\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}X_t\mathrm{d}t + \sqrt{1 - X_t^2}\mathrm{d}B_t$.

Przy rozwiązywaniu zwróć uwagę na zależność od warunków początkowych w chwili $t = 0$.

Zad. 4. Dla X_t spełniającego $\mathrm{d}X_t = \mu_1(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma_1(t, X_t)\mathrm{d}B_t$ sprawdź, jakie stochastyczne równanie różniczkowe $\mathrm{d}Y_t = \mu_2(t, Y_t)\mathrm{d}t + \sigma_2(t, Y_t)\mathrm{d}B_t$ spełniają

a) $Y_t = (X_t)^2$,

b) $Y_t = \mathrm{e}^{X_t}$.

Zad. 5. Załóżmy, że chcemy zredukować równanie różniczkowe $\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t$, upraszczając wyrazy stojące przed $\mathrm{d}t$ lub $\mathrm{d}B_t$. Znajdź takie przekształcenie $f(x)$, aby proces $Y_t = f(X_t)$ spełniał równanie

a) $\mathrm{d}Y_t = \tilde{\mu}(Y_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t$, wyznacz też $\tilde{\mu}$,

b) $\mathrm{d}Y_t = \tilde{\sigma}(Y_t)\mathrm{d}B_t$, wyznacz też $\tilde{\sigma}$.

Zad. 6. Na cząstkę uwięzioną w potencjale harmonicznym w wodzie działają 3 najważniejsze siły: siła oporu ośrodka $-\beta\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$, siła harmoniczna $-\kappa X$ oraz siła termiczna $D\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$. Gdy cząstka nie doznaje dużych zmian pędu, suma sił na nią działających powinna w przybliżeniu wynosić 0. Zapisz powstałe równanie i zinterpretuj je jako równanie Itô. Następnie rozwiąż je z warunkiem początkowym $X_0 = 0$.

Zad. 7. Rozwiąż równanie

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s \sigma_s \mathrm{d}B_s.$$

Zad. 8. Pokaż, że rozwiązaniem równania

$$\mathrm{d}X_t = m_t X_t \mathrm{d}t + r_t X_t \mathrm{d}B_t$$

jest

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t g_s \mathrm{d}s\right).$$

Znajdź postać funkcji g.

Rozwiązanie (niemal) ogólnego liniowego stochastycznego równania różniczkowego. Niech proces X_t spełnia równanie

$$\mathrm{d}X_t = \big(a_t X_t + b_t\big)\mathrm{d}t + c_t \mathrm{d}B_t.$$

Wtedy jest on postaci

$$X_t = \phi_t \left(X_0 + \int_0^t \frac{b_s}{\phi_s}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{c_s}{\phi_s}\mathrm{d}B_s\right),$$

gdzie $\phi_t = \exp\left(\int_0^t a_s \mathrm{d}s\right)$.

Zad. 9. Udowodnij powyższe twierdzenie.

Zad. 10. Rozwiąż stochastyczne równanie różniczkowe na odcinku $[0, \pi/2)$.

$$\mathrm{d}X_t = \frac{1}{\cos t} X_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 1.$$

Wynik wyraź jako całkę po po przyrostach brownowskich ze znanej funkcji (kombinacji funkcji elementarnych).

Zad. 11. Udowodnij, że $X_t := \frac{B_t}{t+1}$ rozwiązuje następujące stochastyczne równanie różniczkowe: $\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{t+1} X_t \mathrm{d}t + \frac{1}{1+t} \mathrm{d}B_t$.

Zad. 12. Znajdź różniczkę stochastyczną procesu

$$Y_t := (X_t^1)^2 + (X_t^2)^2 + \ldots + (X_t^d)^2$$

dla d niezależnych procesów Ornsteina-Uhlenbecka X_t^k. Czy potrafisz uprościć wyrażenie będące szumem losowym w różniczce Y_t?

Zad. 13. Niech X będzie całkowalnym z kwadratem martyngałem zatrzymanym w czasie zatrzymania T. Udowodnij, że zatrzymany proces X^S również jest tej klasy dla dowolnego czasu zatrzymania S.

Zad. 14. **T** Udowodnij, że dla dowolnej klasy procesów $\mathcal{C}$ mamy $(\mathcal{C}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$.

Zad. 15. Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym, zaś Z_0 zmienną $\mathcal{F}_0$-mierzalną. Udowodnij, że proces $Z_t := \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t)$ jest martyngałem lokalnym takim, że $\mathrm{d}Z_t = Z_t \mathrm{d}M_t$.

Zad. 16. **T** Niech $f\colon R_+ \to R_+$ będzie niemalejącą i ciągłą funkcją. Udowodnij, że istnieje ciągły martyngał M_t taki, że $\langle M \rangle_t = f(t)$.

Zad. 17. Czy jest prawdą, że jeśli $\langle M \rangle_t = \langle N \rangle_t$ dla lokalnie całkowalnych z kwadratem martyngałów $M, N \in \mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}$, to M i N mają taki sam rozkład?

Zad. 18. Niech B będzie ruchem Browna oraz H całkowalnym procesem takim, że $|H_t| = 1$ dla każdego t. Niech $M_t := \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$. Udowodnij, że M jest także ruchem Browna.

Zad. 19. Oblicz $\mathrm{d}\langle B^2 \rangle_t$ oraz $\mathrm{d}\langle B, \mathrm{e}^B \rangle_t$.

Zad. 20. Znajdź $\mathrm{d}\langle X, Y \rangle_t$ dla $X_t = t^3 B_t$ i $Y_t = \int_0^t B_s^3 \mathrm{d}B_s$.

Zad. 21. Udowodnij, że

a) $\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}$,

b) $\int_0^t B_s^2 \mathrm{d}B_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s \mathrm{d}s$

Zad. 22. **T** Znajdź jawną postać $\int_0^1 \mathbf{1}_{\{B_s=0\}} \mathrm{d}B_s$.

Izometria Itô dla całki Itô. Niech X_t oraz Y_t będą $\mathcal{F}_t^B$ mierzalnymi procesami takimi, że

$$\int_0^t \mathbb{E}[X_s^2]\mathrm{d}s, \int_0^t \mathbb{E}[Y_s^2]\mathrm{d}s < \infty$$

wtedy

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s \mathrm{d}B_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s \mathrm{d}B_s\right] = 0$$

oraz

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s \mathrm{d}B_s \cdot \int_0^t Y_s \mathrm{d}B_s\right] = \int_0^t \mathbb{E}[X_s Y_s]\mathrm{d}s$$

Zad. 23. Oblicz

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^2 B_s \mathrm{d}B_s, \int_1^3 B_s \mathrm{d}B_s\right).$$

Zad. 24. **T** Załóżmy, że $[B_t^1, B_t^2, B_t^3]$ jest trójwymiarowym ruchem Browna oraz

$$X_t := \int_0^t \sin(B_t^3)\mathrm{d}B_t^1 + \int_0^t \cos(B_t^3)\mathrm{d}B_t^2.$$

Wykaż, że X jest ruchem Browna.

Zad. 25. Jaki rozkład ma $B_3 + \int_0^4 s\mathrm{d}B_s$?

Zad. 26. Oblicz średnią oraz wariancję zmiennej losowej $\int_0^1 |B_s|\mathrm{d}B_s$.

Zad. 27. Rozwiąż równanie Langevina z ruchomym potencjałem

$$\mathrm{d}X_t = -\lambda(X_t - r_t)\mathrm{d}t + D\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x_0,$$

które odpowiada ruchowi cząstki w potencjale harmonicznym, który ciągnie ją wzdłuż trajektorii r_t. Podaj równania na średnią i wariancję tego procesu.

Zad. 28. Oblicz

a) $\mathbb{E}\left[\int_0^t \cos(s)\mathrm{d}B_s \cdot \int_0^t \sin(s)\mathrm{d}B_s\right]$,

b) $\mathbb{E}\left[\left(\int_t^{t+1} B_s\mathrm{d}B_s\right)^2\right]$.

Zad. 29. Oblicz wariancję $\mathrm{Var}(Y_t)$ procesów

a) $Y_t := \int_1^t \left(B_s - B_{s-1}\right)^n \mathrm{d}B_s, \quad t \geq 1, n \in \mathbb{N}$,

b) $Y_t := \int_0^t \sqrt{|B_s|}\,\mathrm{d}B_s$.

Zad. 30. Niech $K_t := \int_0^t \sqrt{2B_s^2+3}\mathrm{d}B_s$ i $M_t := \int_0^t B_s\mathrm{d}K_s$. Znajdź $\mathbb{E}[K_sK_t]$ dla $s < t$ oraz średnią i wariancję procesu M_t.

Zad. 31. Niech $X_t := \int_0^t \sqrt{|B_s|+2}\mathrm{d}B_s$. Znajdź funkcję kowariancji procesu X.

Zad. 32. Oblicz korelację między dwoma procesami Ornsteina-Uhlenbecka współdzielącymi szum

$$\mathrm{d}X_t^1 = -\lambda_1 X_t^1\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad \mathrm{d}X_t^2 = -\lambda_2 X_t^2\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad X_0^1 = X_0^2 = 0.$$

Zad. 33. Niech proces X_t będzie równy

$$X_t := \int_0^t \sigma_s\mathrm{d}B_s + t,$$

dla pewnej funkcji σ_s. Oblicz funkcję średniej procesu $Y_t = X_t^3$ (wynik będzie zależał od σ_s). W tym celu rozważ stochastyczne równanie różniczkowe, jakie spełnia Y_t.

Zad. 34. Niech W^1 i W^2 będą niezależnymi ruchami Browna. Definiujemy: $B^1 := W^1$ oraz

$$B_t^2 := \int_0^t \rho_s\mathrm{d}W_s^1 + \int_0^t \sqrt{1-\rho_s^2}\mathrm{d}W_s^2.$$

Udowodnij, że B^2 jest też ruchem Browna oraz że $\mathrm{d}\langle B^1, B^2\rangle_t = \rho_t\mathrm{d}t$.

Zad. 35. Niech S_t będzie ceną akcji w czasie t, która rozwiązuje stochastyczne równanie różniczkowe:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}B_t.$$

Oblicz dla $\mu = 1$ [1/mieś] oraz $\sigma = 2$ [1/zł], prawdopodobieństwo, że cena przekroczy poziom 45 za 4 miesiące jeśli jej obecna cena wynosi 38.

Zad. 36. **T** Dla procesu jak wyżej oblicz prawdopodobieństwo, że cana przekroczy poziom 45 w ciągu najbliższych 4 miesięcy.

Zad. 37. Znajdź wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X_t$ oraz wariancję $\mathrm{Var}X_t$ dla procesu oprocentowania CIR danego równaniem stochastycznym:

$$dX_t = a(b - X_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}B_t,$$

gdzie a, b i $\sigma > 0$ są ustalonymi parametrami.

Całka Itô jako martyngał. Niech X_t będzie $\mathcal{F}_t^B$ mierzalny. Wtedy

$$Y_t = \int_0^t X_s \, \mathrm{d}B_s$$

jest martyngałem.

Zad. 38. Użyj formuły Itô aby pokazać, że następujące procesy są martyngałami:

a) $X_t := \mathrm{e}^{t/2} \cos B_t$,

b) $X_t := \mathrm{e}^{t/2} \sin B_t$,

c) $X_t := (B_t + t)\mathrm{e}^{-B_t - t/2}$,

d) $X_t := B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$

Zad. 39. Dla jakich α, β proces $e^{\beta t} \cos \alpha B_t$ jest martyngałem?

Zad. 40. Niech

$$Y_t := tB_t - \int_0^t B_s \mathrm{d}s, \qquad Z_t := \exp\left(Y_t - \frac{1}{6}t^3\right).$$

Pokaż, że Z_t jest martyngałem względem naturalnej filtracji ruchu Browna.

Zad. 41. **T** Niech process X rozwiązuje następujące równanie stochastyczne:

$$\mathrm{d}X_t = mX_t\mathrm{d}t + sX_t\mathrm{d}B_t, \qquad X_0 = 1.$$

Dla jakiej liczby rzeczywistej β proces $(X_t)^\beta$ jest martyngałem? Znajdź $P(X_\tau = 2)$ dla $\tau = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \notin (\frac{1}{2}, 2)\}$.

Zad. 42. Niech

$$\beta_k(t) := \mathbb{E}[B_t^k]; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; t \geq 0.$$

Użyj formuły Itô aby udowodnić, że

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t \beta_{k-2}(s) \, \mathrm{d}s; \qquad k \geq 2.$$

Znajdź

$$\mathbb{E}[B_t^6].$$

Zad. 43. **T** Niech proces X rozwiązuje stochastyczne równanie różniczkowe:

$$\mathrm{d}X_t = \frac{b - X_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \qquad 0 \le t < 1, \qquad X_0 = a.$$

Udowodnij, że $\lim_{t\uparrow 1} X_t = b$ a.s. Proces X_t nazywany jest mostem Browna.

Zad. 44. **T** Znajdź rozkład stacjonarny modelu Vašíčka, czyli procesu X_t rozwiązującego następujące SDE:

$$dX_t = a(b - X_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t,$$

$a, b, \sigma > 0$ są ustalonymi stałymi. W tym celu udowodnij, że gęstość tego rozkładu stacjonarnego rozwiązuje równanie Fokkera-Plancka (bez składowej związanej z pochodną cząstkową ∂_t).

Zad. 45. Udowodnij, że równanie stochastyczne

$$\mathrm{d}X_t = 3X_t\mathrm{d}t - 5\cos X_t\mathrm{d}B_t, \qquad X_0 = 7$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zad. 46. **T** Oblicz $\int_0^\tau B_s\mathrm{d}B_s$ dla $\tau = \inf\{t \ge 0\colon B_t = \sqrt{t+2}\}$.

Zad. 47. **T** Znajdź równanie różniczkowe, które spełnia funkcja

$$u(t,x) := \mathbb{E}\left[\cos(x + B_t)\exp\left(-\int_0^t (x + B_s)\mathrm{d}s\right)\right].$$

Zad. 48. Proces X rozwiązuje następujące SDE:

$$\mathrm{d}X_t = \cos X_t\mathrm{d}B_t + 3X_t\mathrm{d}t.$$

Jaki jest jego infinitezymalny generator i jego dziedzina?

Zad. 49. Znajdź proces X_s^T taki, że

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T X_s^T\,\mathrm{d}B_s$$

dla $F \in L^2(\mathcal{F}_T^B, P)$ postaci

a) $F = B_T$,

b) $F = B_T^2$,

c) $F = e^{B_T}$,

Zad. 50. Znajdź proces X_s^T taki, że

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T X_s^T \, \mathrm{d}B_s$$

dla $F \in L^2(\mathcal{F}_T^B, P)$ postaci

a) $F = B_T^3$,
b) $F = \int_0^T B_s \, \mathrm{d}B_s$,
c) $F = \sin B_T$.

Całka Stratonowicza. Całkę w sensie Stratonowicza możemy zdefiniować jako sumę całki w sensie Itô oraz deterministycznej

$$\int_0^t \sigma(s, B_s) \circ \mathrm{d}B_s := \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x \sigma(s, B_s) \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, B_s) \mathrm{d}B_s.$$

Równanie różniczkowe w sensie Stratonowicza można rozważać jako równanie w sensie Itô. Równanie Stratonowicza z $\circ \mathrm{d}B_t$

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t) \circ \mathrm{d}B_t$$

jest równoważne równaniu

$$\mathrm{d}X_t = \left(\mu(t, X_t) + \frac{1}{2}\partial_x \sigma(t, X_t)\sigma(t, X_t)\right) \mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t,$$

gdzie druga różniczka jest rozumiana w sensie Itô.

Zad. 51. Niech $\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t$. Wyraź to równanie w sensie Itô jako równanie w sensie Stratonowicza. Co dzieje się w sytuacji, gdy σ nie zależy od X_t, tzn. $\sigma(t, X_t) = \sigma(t)$?

Wzór Itô dla równania Stratonowicza. Niech X_t spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t) \circ \mathrm{d}B_t,$$

a funkcja $f(t, x)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe $\partial_t f, \partial_x f$. Wtedy proces $Y_t = f(t, X_t)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}\big(f(t, X_t)\big) = \partial_t f(t, X_t)\mathrm{d}t + \partial_x f(t, X_t)\mathrm{d}X_t.$$

Zad. 52. Oblicz całki stochastyczne

a)

$$\int_0^t \sin(B_s)\mathrm{d}s + \int_0^t s\cos(B_s) \circ \mathrm{d}B_s$$

b)

$$\int_0^t B_s e^{sB_s}\mathrm{d}s + \int_0^t s e^{sB_s} \circ \mathrm{d}B_s$$

Zad. 53. Rozważając $f(B_t)g(B_t)$ udowodnij wzór na całkowanie przez części dla całki Stratonowicza. Następnie podaj analogiczny wzór na całkowanie przez części dla całki Itô.

Zad. 54. Rozwiąż stochastyczne równanie różniczkowe

$$\mathrm{d}X_t = m_t X_t \mathrm{d}t + r_t X_t \circ \mathrm{d}B_t.$$

Wynik porównaj z wynikiem dla równania o tych samych współczynnikach, interpretowanego w sensie Itô (tzn. z $r_t X_t \mathrm{d}B_t$).

Zad. 55. Udowodnij wzór Itô dla równania Stratonowicza, opierając się na klasycznym wzorze Itô i relacji między równaniami Itô oraz Stratonowicza.

Zad. 56. Rozwiąż stochastyczne równania różniczkowe

a)

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{e}^{-X_t} \circ \mathrm{d}B_t,$$

b)

$$\mathrm{d}X_t = (1 + X_t^2) \circ \mathrm{d}B_t,$$

c)

$$\mathrm{d}X_t = X_t \mathrm{d}t + \sqrt{\mathrm{e}^{2t} - X_t^2} \circ \mathrm{d}B_t.$$

Wzór Itô dla n procesów Itô. Jeśli procesy $X_t^i, i \in \{1, \dots, n\}$ spełniają stochastyczne równania różniczkowe

$$\mathrm{d}X_t^i = \mu_i(t, X_t^1, \dots, X_t^n)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}(t, X_t^1, \dots, X_t^n)\mathrm{d}B_t^k,$$

gdzie B^i to niezależne ruchy Browna, to proces $Y_t = f(t, X_t^1, \dots, X_t^n)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$\mathrm{d}Y_t = f_t\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f \mathrm{d}X_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i,x_j} f \mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_t$$

gdzie f oraz jej pochodne obliczane są w punkcie $(t, X_t^1, \dots, X_t^n)$, a kowahanie kwadratowe $\mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_t$ obliczamy według reguły: z iloczynu różniczek $\mathrm{d}X_t^i\mathrm{d}X_t^j$ wyrzucamy wszystkie człony z $\mathrm{d}t\mathrm{d}t, \mathrm{d}t\mathrm{d}B_t^i$ oraz $\mathrm{d}B_t^i\mathrm{d}B_t^j, i \neq j$ a w członach z $\mathrm{d}B_t^i\mathrm{d}B_t^i$ zastępujemy ten iloczyn $\mathrm{d}t$.

Zad. 57. Oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

a) $X_t = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2$ (gdzie $[B^1, B^2]$ jest dwuwymiarowym ruchem Browna);

b) $X_t = [B_t^1 + B_t^2 + B_t^3; (B_t^2)^2 - B_t^1 B_t^3]$, (gdzie $[B^1, B^2, B^3]$ jest trójwymiarowym ruchem Browna).

Zad. 58. Rozwiąż wieloczynnikowe równanie stochastycznego wzrostu

$$\mathrm{d}X_t = rX_t\mathrm{d}t + X_t\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_n \mathrm{d}B_t^n\right), \quad X_0 = x_0.$$

Zad. 59. **T** Niech $Z_t := B_t^1 + \mathrm{i}B_t^2$ będzie zespolonym ruchem Browna. Oblicz różniczkę stochastyczną zespolonego procesu $X_t = f(Z_t)$. Co się stanie, kiedy f jest holomorficzna, tj. dla $z = x + \mathrm{i}y$, $f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ $\partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v$?

Zad. 60. Udowodnij pełny stochastyczny wzór na całkowanie przez części

$$\int_0^t X_s\mathrm{d}Y_s = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t Y_s\mathrm{d}X_s - \int_0^t \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s.$$

Zad. 61. Rozwiąż równanie

$$\mathrm{d}X_t = r\mathrm{d}t + \alpha X_t\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 1$$

Wsk.: Możesz użyć stochastycznego czynnika całkującego

$$F_t = \exp\left(-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right).$$

Zad. 62. **T** Wykaż, że proces

$$X_t := \frac{\mathrm{e}^{5B_t - \frac{25}{2}t}}{1 + \int_0^t \mathrm{e}^{5B_s - \frac{25}{2}s}\mathrm{d}s}$$

spełnia następujące SDE

$$\mathrm{d}X_t = 5X_t\mathrm{d}B_t - X_t^2\mathrm{d}t, \qquad X_0 = 1.$$

Zad. 63. **T** Rozwiąż następujące równanie różniczkowe:

$$\mathrm{d}X_t = X_t^\gamma\mathrm{d}t + X_t\mathrm{d}B_t.$$

Dla jakich γ uzyskamy eksplozję rozwiązania?
Wsk.: Patrz Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Ex. 5.16.

Liniowe równania stochastyczne o stałych współczynnikach. Niech układ stochastycznych równań różniczkowych będzie o stałych współczynnikach, to znaczy postaci

$$\mathrm{d}\mathbf{X}_t = A\mathbf{X}_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathbf{B}_t,$$

gdzie $\mathbf{X}$ jest kolumnowym wektorem procesów $\mathbf{X}_t = [X_t^1, \ldots, X_t^N]^\mathrm{T}$, A pewną stałą macierzą deterministyczną $N \times N$, a $\mathrm{d}\mathbf{B}$ kolumnowym wektorem niezależnych różniczek ruchów Browna postaci $\mathrm{d}\mathbf{B}_t = [\sigma_1\mathrm{d}B_t^1, \ldots, \sigma_N\mathrm{d}B_t^N]^\mathrm{T}$ przeskalowanym przez stałe σ_N.

Dla takiego układu równań, rozwiązanie jest takiej samej postaci jak dla równań deterministycznych, to znaczy

$$\mathbf{X}_t = \mathrm{e}^{At}\mathbf{X}_0 + \mathrm{e}^{At}\int_0^t \mathrm{e}^{-As}\mathrm{d}\mathbf{B}_s,$$

gdzie e^{At} to eksponenta macierzowa.

Zad. 64. Rozwiąż układ równań różniczkowych

$$\mathrm{d}\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{X}_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathbf{B}_t, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathrm{d}\mathbf{B}_t = [\mathrm{d}B_t^1, \mathrm{d}B_t^2]^\mathrm{T}$.

Zad. 65. Rozwiąż układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = Y_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t^1, & X_0 = 1 \\ \mathrm{d}Y_t = Y_t \mathrm{d}t + 2\mathrm{d}B_t^2, & Y_0 = 0. \end{cases}$$

Zad. 66. **T** Obwód elektryczny, w którym płynie ładunek Q_t o natężeniu $I_t = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, składający się z oporu R, cewki L, kondensatora C oraz źródła siły elektromotorycznej $\mathcal{E}_t$ połączonych szeregowo, jest opisany równaniem

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E}.$$

a) Zinterpretuj równania na Q_t oraz I_t jako układ równań stochastycznych, zakładając, że siła elektromotoryczna to termiczne fluktuacje występujące w kablach: $\mathcal{E}_t dt = dB_t$.

b) Rozwiąż powstały układ równań dla $L = 1, R = 3, C = 1/2$ z warunkiem początkowym $Q_0 = I_0 = 0$.

c) Oblicz $\mathbb{E}[I_t^2]$ korzystając z izometrii Itô.

Zad. 67. **T** Cząstka dryfująca w cieczy i złapana w potencjale harmonicznym porusza się zgodnie z równaniem Newtona

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = F_h + F_{op} + F_{th},$$

gdzie $F_h = -kX$ to siła pułapkująca, $F_{op} = -\beta\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ to siła oporu cieczy, a $F_{th} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ to fluktuacje termiczne, wywołujące dyfuzję.

a) Wprowadzając zmienną $V = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ zapisz równanie Newtona jako układ stochastycznych równań różniczkowych o stałych współczynnikach.

b) Rozwiąż ten układ równań dla $m = 2, \beta = 8, k = 6$ z zerowymi warunkami początkowymi.