

# Analiza Matematyczna MAEW101

Wydział Elektroniki

## Listy zadań nr 1-7 (część I)

na podstawie skryptów:

M.Gewert, Z Skoczylas, *Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania*,  
GiS, Wrocław 2005

M.Gewert, Z Skoczylas, *Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania*,  
GiS, Wrocław 2006

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

## Lista 1.

### Zadanie 1.1

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic oraz o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć podane granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{n - 3n^3}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{20} + 2)^3}{(n^3 + 1)^{20}}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^5 + 1} + 1}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n})$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^4 + 16} - n)$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 \cdot 5^n + 2^n + 3}{5^n - 4^n} \right)^5$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8^{n+1} + 3}}{2^n + 1}$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1)$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n} \right)^n$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (n+1)!}{n! + 2}$$

### Zadanie 1.2

Korzystając z twierdzeń o trzech i o dwóch ciągach znaleźć podane granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{5^n + 4^n}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n2^n + 1}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + n}} \right)$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n + 2}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n! - 2)n^2$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\lfloor \sqrt{1} \rfloor} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{2} \rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right)$$

### Zadanie 1.3

Korzystając z definicji liczby  $e$  obliczyć podane granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n + 2}{5n + 1} \right)^{15n}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{3n + 1} \right)^n$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n^2 + 2} \right)^{n^2}$$

## Lista 2.

### Zadanie 2.1

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic oraz o granicach niewłaściwych funkcji obliczyć podane granice

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x - 5)}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 1}{3^x + 2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

### Zadanie 2.2

Korzystając z twierdzeń o trzech i o dwóch funkcjach uzasadnić podane równości:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x^2} = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x} + \sin x}{2^{-x} + \cos x} = 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x^2 + 1 \rfloor}{\lfloor x \rfloor} = \infty$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0-} \left( 3 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \frac{1}{x^3} = -\infty$$

### Zadanie 2.3

Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice funkcji

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin(2x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^x - 1}{4\sqrt{x} - 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{3 \cdot 2^x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/(3x)}$$

### Zadanie 2.4

Obliczając granice jednostronne zbadać, czy istnieją podane granice funkcji

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x^3}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x - 3}$$

### Zadanie 2.5

Uzasadnić, że podane granice nie istnieją

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cos x$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0+} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

## Lista 3.

### Zadanie 3.1

Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji

$$(a) f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$$

$$(b) f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$(c) f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{9 - x^2}}$$

### Zadanie 3.2

Zbadać ciągłość podanej funkcji we wskazanym punkcie, przy czym w przypadku nieciągłości określić jej rodzaj:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & \text{dla } x \neq 0 \\ e & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{dla } x \in (0, 1) \cup (1, \infty) \\ 3 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

$x_0 = 1$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \frac{|x| + x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$

### Zadanie 3.3

Dobrać parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby podana funkcja była ciągła w obu wskazanych punktach:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ a^x + b & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \quad x_1 = 0 \text{ oraz w } x_2 = 1$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{dla } |x| < 2 \\ x\sqrt{x^2 - 4} & \text{dla } |x| \geq 2, \end{cases} \quad x_1 = -2 \text{ oraz w } x_2 = 2$$

### Zadanie 3.4

Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że podane równanie ma jednoznaczne rozwiązanie we wskazanym przedziale. W punkcie (c) wyznaczyć to rozwiązanie z dokładnością 0,125.

$$(a) x^3 + 6x - 2 = 0, (0, 1)$$

$$(b) 1 = \frac{\sin x}{2} + x, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(c) 3^x + x = 3, (0, 1)$$

## Lista 4.

### Zadanie 4.1

Korzystając z definicji zbadać, czy istnieje pochodna właściwa lub niewłaściwa podanej funkcji we wskazanym punkcie

(a)  $f(x) = |x| \sin x, x_0 = 0$

(b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 2 \\ 2^x & \text{dla } x > 2, \end{cases}, x_0 = 2$

(c)  $f(x) = 3 - \sqrt[5]{x}, x_0 = 0$

(d)  $f(x) = \sqrt{|\sin x|}, x_0 = 0$

### Zadanie 4.2

Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji

(a)  $f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) e^x$

(e)  $f(x) = (1 + \sqrt[4]{x}) \operatorname{tg}(\sqrt{x})$

(b)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^4 + 4}$

(f)  $f(x) = \frac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}$

(c)  $f(x) = \sqrt[3]{\arcsin(x^2)}$

(g)  $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$

(d)  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{3^x}$

(h)  $f(x) = \sqrt{x}$

### Zadanie 4.3

Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć

(a)  $(f^{-1})'(e+1)$  dla  $f(x) = x + \ln x$

(b)  $(f^{-1})'(4)$  dla  $f(x) = x^3 + 3^x$

### Zadanie 4.4

Obliczyć  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$  dla podanej funkcji  $f(x)$

(a)  $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$

(c)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

(b)  $f(x) = x \sin x$

(d)  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$

### Zadanie 4.5

Napisać równanie stycznej do wykresu podanej funkcji we wskazanym punkcie

(a)  $f(x) = \sqrt{2^x + 1}, (3, f(3))$

(b)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, (\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$

(c)  $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2), (0, f(0))$

## Lista 5.

### Zadanie 5.1

Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość podanego wyrażenia

(a)  $\frac{1}{\sqrt{3,98}}$

(b)  $e^{0,04}$

(c)  $\ln \frac{2001}{2000}$

### Zadanie 5.2

Stosując wzór Maclaurina obliczyć przybliżoną wartość podanego wyrażenia zadaną dokładnością

(a)  $\frac{1}{e}$  z dokł.  $10^{-3}$

(b)  $\ln(1,1)$  z dokł.  $10^{-4}$

(c)  $\sin(0,1)$  z dokł.  $10^{-5}$

### Zadanie 5.3

Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć podane granice

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0-} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

### Zadanie 5.4

Uzasadnić podaną tożsamość

(a)  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$  dla  $x \in \mathbb{R}$

(b)  $\arcsin \left( \frac{2x}{1+x^2} \right) = 2\operatorname{arctg} x$  dla  $x \in (-1, 1)$

## Lista 6.

### Zadanie 6.1

Znaleźć przedziały monotoniczności podanej funkcji

(a)  $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$

(b)  $f(x) = xe^{-3x}$

(c)  $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$

(d)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

### Zadanie 6.2

Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanej funkcji

(a)  $f(x) = x^3 - 4x^2$

(b)  $f(x) = (x - 5)e^x$

(c)  $f(x) = x \ln x$

(d)  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$

(e)  $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$

### Zadanie 6.3

Znaleźć wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na wskazanym przedziale

(a)  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ ,  $[1; 2, 5]$

(b)  $f(x) = 1 - |9 - x^2|$ ,  $[-4, 1]$

### Zadanie 6.4

Określić przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia podanej funkcji

(a)  $f(x) = \ln(1 + x^2)$

(b)  $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

(c)  $f(x) = \sin x + \frac{1}{8} \sin(2x)$

### Zadanie 6.5 (zadanie domowe)

Zbadać przebieg zmienności podanej funkcji i narysować jej wykres

(a)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$

(c)  $f(x) = e^{\frac{2-x^2}{x^2-1}}$

(d)  $f(x) = x2^{\frac{1}{x}}$

(e)  $f(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$

## Lista 7.

### Zadanie 7.1

Obliczyć podane całki nieoznaczone

$$(a) \int \frac{x^4}{x^2+1} dx$$

$$(c) \int \frac{2^x - 5^x}{10^x} dx$$

$$(b) \int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(d) \int \frac{\cos(2x)}{\cos x - \sin x} dx$$

### Zadanie 7.2

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone

$$(a) \int x^2 \sin x \, dx$$

$$(c) \int \ln(x+1) dx$$

$$(b) \int \sqrt{x} \arctg \sqrt{x} \, dx$$

$$(d) \int e^{2x} \sin x \, dx$$

### Zadanie 7.3

Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć podane całki nieoznaczone

$$(a) \int (5-3x)^{10} dx$$

$$(d) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$$

$$(b) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$(c) \int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} \, dx$$



## Odpowiedzi i wskazówki:

### Lista nr 1:

**1.1** (a)  $-\frac{1}{3}$ ; (b) 1; (c) 0; (d) 1; (e) 0; (f)  $3^5$ ; (g) 2; (h)  $\infty$ ; (i) 0; (j)  $-\infty$

**1.2** (a)  $\frac{3}{5}$ ; (b) 2; (c) 1; (d)  $\frac{2}{3}$ ; (e)  $-\infty$ ; (f)  $\infty$

**1.3** (a)  $e^3$ ; (b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ; (c)  $e^{-2}$ ;

### Lista nr 2:

**2.1** (a) 1; (b) 0; (c)  $\frac{3}{4}$ ; (d)  $\frac{1}{3}$ ; (e)  $\frac{1}{2}$ ; (f)  $\frac{1}{4}$ ; (g) 1; (h) 0; (i)  $\infty$ ; (j)  $\infty$ ; (k)  $-\infty$

**2.3** (a) 9; (b)  $\frac{3}{2}$ ; (c) 0; (d)  $\frac{1}{3}$ ; (e)  $e^{1/3}$

**2.4** (a) nie istnieje,  $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = -4$ ;

(b) nie istnieje,  $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{\frac{1}{x^3}} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} 2^{\frac{1}{x^3}} = 0$ ;

(c) nie istnieje,  $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x^2}{x - 3} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x^2}{x - 3} = -\infty$ ;

**2.5** Wskazówka: (a)  $x'_n = 2n\pi$ ,  $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ; (b)  $x'_n = (2n\pi)^{-2}$ ,  $x''_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-2}$

### Lista nr 3:

**3.1** (a) asymptoty pionowe obustronne  $x = -2$  i  $x = 2$ , asymptota ukośna  $y = x + 1$  w  $\infty$  i  $-\infty$ ;  
(b) asymptota pozioma  $y = 0$  w  $\infty$  i  $-\infty$ ; (c) asymptota pionowa prawostronna  $x = -3$

**3.2** (a) ciągła; (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \neq 3 = f(1)$ , „luka”; (c)  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ , „skok”;  
(d)  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$ , nieciągłość II rodzaju, przy czym  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0 = f(0)$ , ciągła lewostronnie

**3.3** (a)  $a = 2, b = 1$ ; (b)  $a = 0, b = -4$

**3.4** (c) przybliżone rozwiązanie to 0,625

**Lista nr 4:**

**4.1** (a)  $f'(0) = 0$ ; (b) nie istnieje; (c)  $f'(0) = -\infty$ ; (d) nie istnieje

**4.2** (a)  $f'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + 3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)e^x, x \neq 0$ ; (b)  $f'(x) = \frac{(x^4 + 4)\cos x - 4x^3 \sin x}{(x^4 + 4)^2}$ ;  
 (c)  $f'(x) = \frac{1}{3}(\arcsin(x^2))^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x, -1 < x < 1$ ; (d)  $f'(x) = 3^{-x} \left(\frac{1}{1+x^2} - \ln 3 \operatorname{arctg} x\right)$ ;  
 (e)  $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \operatorname{tg}(\sqrt{x}) + (1 + \sqrt[4]{x})(1 + \operatorname{tg}^2(\sqrt{x})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0, x \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2$ ;  
 (f)  $f'(x) = 2(\ln 2 + \ln 3) \sin x \cos x \cdot 2^{\sin^2 x} 3^{-\cos^2 x}$ ;  
 (g)  $f'(x) = e^{\operatorname{tg} x \ln x} \left((1 + \operatorname{tg}^2 x) \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}\right), x > 0, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ;  
 (h)  $f'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x), x > 0$

**4.3** (a)  $\frac{e}{e+1}$ ; (b)  $\frac{1}{3(1+\ln 3)}$

**4.4** (a)  $f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}, f''(x) = 6x - \frac{4}{x^3}, f'''(x) = 6 + \frac{12}{x^4}$ ;  
 (b)  $f'(x) = \sin x + x \cos x, f''(x) = 2 \cos x - x \sin x, f'''(x) = -3 \sin x - x \cos x$ ;  
 (c)  $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}, f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}, f'''(x) = \frac{(6x-3x^2-x^3-6)e^x}{x^4}$ ;  
 (d)  $f'(x) = \frac{3}{2} \sin(2x)(\sin x - \cos x), f''(x) = \frac{3}{2} \cdot (2 \cos(2x)(\sin x - \cos x) + \sin(2x)(\cos x + \sin x))$ ,  
 $f'''(x) = \frac{3}{2} \cdot (-5 \sin(2x)(\sin x - \cos x) + 4 \cos(2x)(\cos x + \sin x))$

**4.5** (a)  $y - 3 = \frac{4 \ln 2}{3}(x - 3)$ ; (b)  $y - \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{2}{9}(x - \sqrt{2})$ ; (c)  $y = 0$

**Lista nr 5:**

**5.1** (a) 0,50125; (b) 1,04; (c) 0,0005

**5.2** (a)  $\frac{53}{144} \approx 0,368, f(x) = e^x, n = 7$ ; (b)  $\frac{286}{3000} \approx 0,0953, f(x) = \ln(1+x), n = 4$ ;  
 (c)  $\frac{599}{6000} \approx 0,1, f(x) = \sin x, n = 5$ ;

**5.3** (a)  $\ln 2$ ; (b) 0; (c) 0; (d) 0; (e) 1

### Lista nr 6:

- 6.1** (a) malejąca na  $(5, 15)$ , rosnąca na  $(-\infty, 5)$  i na  $(15, \infty)$ ; (b) malejąca na  $(\frac{1}{3}, \infty)$ , rosnąca na  $(-\infty, \frac{1}{3})$ ; (c)  $D_f : |x| \neq \sqrt{3}$ , malejąca na  $(-\infty, -3)$  i na  $(3, \infty)$ , rosnąca na  $(-3, -\sqrt{3})$ , na  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  i na  $(\sqrt{3}, 3)$ ; (d)  $D_f : x > 0, x \neq 1$ , malejąca na  $(0, 1)$  i na  $(1, e)$ , rosnąca na  $(e, \infty)$
- 6.2** (a) maksimum lokalne właściwe w  $x_0 = 0$ ,  $f(0) = 0$ ; minimum lokalne właściwe w  $x_0 = \frac{8}{3}$ ,  $f(\frac{8}{3}) = -\frac{256}{27}$ ; (b) minimum lokalne właściwe w  $x_0 = 4$ ,  $f(4) = -e^4$ ;  
(c) minimum lokalne właściwe w  $x_0 = \frac{1}{e}$ ,  $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ ; (d) maksimum lokalne właściwe w  $x_0 = -1$  i w  $x_0 = 1$ ,  $f(-1) = f(1) = 1$ ; (e) maksimum lokalne właściwe w  $x_0 = \frac{5}{2}$ ,  $f(\frac{5}{2}) = \frac{49}{4}$ ; minima lokalne właściwe w  $x_0 = -1$  i  $x_0 = 6$ ,  $f(-1) = f(6) = 0$
- 6.3** (a) wartość najmniejsza 23 (w punkcie  $x = 1$ ), największa 28 (w  $x = 2$ );  
(b) wartość najmniejsza  $-8$  (w punkcie  $x = 0$ ), największa 1 (w  $x = -3$ )
- 6.4** (a) wypukła na  $(-1, 1)$ , wklęsła na  $(-\infty, -1)$  i na  $(1, \infty)$ , p.p.  $(-1, \ln 2)$ ,  $(1, \ln 2)$ ;  
(b) wypukła na  $(-1, 1)$ , wklęsła na  $(-\infty, -1)$  i na  $(1, \infty)$ , brak p.p.;  
(c) wypukła na  $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ , wklęsła na  $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ , p.p.  $(k\pi, 0)$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$
- 6.5** odpowiedzi w skrypcie *Analiza Matematyczna 1, Przykłady i zadania*, do zadania nr 6.5

### Lista nr 7:

- 7.1** (a)  $\frac{1}{3}x^3 + x + \arctg x + C$ ; (b)  $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} + C$ ; (c)  $-\frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$ ; (d)  $\sin x - \cos x + C$
- 7.2** (a)  $2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C$ ; (b)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} \arctg(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \ln |x + 1| + C$ ;  
(c)  $(x + 1) \ln(x + 1) - x + C$ ; (d)  $\frac{1}{5}e^{2x}(2 \sin x - \cos x) + C$
- 7.3** (a)  $\frac{1}{33}(3x - 5)^{11} + C$  (podstawienie  $y = 5 - 3x$ ); (b)  $\sin(\sqrt{x}) + C$  (podstawienie  $y = \sqrt{x}$ );  
(c)  $\frac{1}{18}(5x^3 + 1)\sqrt[5]{5x^3 + 1} + C$  (podstawienie  $y = 5x^3 + 1$ );  
(d)  $2\sqrt{1 + \sin x} + C$  (podstawienie  $y = 1 + \sin x$ ); (e)  $\frac{1}{2} \arcsin(2x) + C$  (podstawienie  $y = 2x$ )