Rachunek prawdopodobieństwa MAP1064
Wydział Elektroniki, rok akad. 2008/09, sem. letni
Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

Wykład 4: Transformata Laplace'a

Definicja.

Niech $f(t)$ będzie funkcją określoną na $\mathbb{R}$, przy czym $f(t) = 0$ dla $t < 0$.
Transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$ nazywamy funkcję

$$\psi(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in D \subset \mathbb{C}.$$

$\psi(s)$ – obraz funkcji $f(t)$, D - zbiór tych liczb zespolonych, dla których całka jest zbieżna.

Uwaga.

Dla $s = x + iy$ funkcja $e^{-st} = e^{-xt}e^{-iyt}$.

Twierdzenie.

Jeżeli $f(t)$, jest **oryginałem**, tzn.

(1) spełnia warunki Dirichleta na każdym ograniczonym otwartym przedziale zawartym w $[0, \infty)$,

(2) istnieją stałe $C \in \mathbb{R}$, $M > 0$ takie, że dla każdego t $|f(t)| \leqslant Me^{Ct}$,

to transformata Laplace'a funkcji $f(t)$ jest dobrze określona na półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, s > C$.

Uwagi.

- **(związek między transformatami Laplace'a i Fouriera)**
  Jeżeli $C < 0$, to $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \mathcal{L}[f(t)](i\omega)$.
- Jeśli funkcja $f(t)$ jest bezwzględnie całkowalna na $[0, \infty)$ (tzn. $\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty$), to transformata Laplace'a tej funkcji jest dobrze określona dla $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ (funkcja ta nie musi być oryginałem).
- **Notacja:**
  Zapis np. $\mathcal{L}[\sin t](s)$ oznacza transformatę Laplace'a funkcji $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \\ \sin t & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$.

Przykłady do zad. 3.1

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI TRANSFORMATY LAPLACE'A:

Załóżmy, że $f(t)$, $g(t)$ są oryginałami, a s dobrane z odpowiedniego zakresu.

(1) **liniowość**
Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dla $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ mamy

$$\mathcal{L}[h(t)](s) = \alpha\mathcal{L}[f(t)](s) + \beta\mathcal{L}[g(t)](s).$$

(2) **przesunięcie w dziedzinie oryginału**
Dla dowolnego $a > 0$, dla $h(t) = \chi(t-a)f(t-a)$,
gdzie $\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t > 0 \end{cases}$ to funkcja Heavyside'a, mamy

$$\mathcal{L}[h(t)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$$

(3) **przesunięcie w dziedzinie obrazu**
Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$, dla $h(t) = f(t)e^{-at}$ mamy

$$\mathcal{L}[h(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s+a)$$

(4) **skalowanie**
Dla dowolnego $a > 0$, dla $h(t) = f(at)$ mamy

$$\mathcal{L}[h(t)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$$

(5) **pochodna obrazu**
Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje pochodna $\mathcal{L}[f(t)]^{(m)}(s) = \frac{d^m}{ds^m}\mathcal{L}[f(t)](s)$ oraz

$$\mathcal{L}[f(t)]^{(m)}(s) = (-1)^m\mathcal{L}[t^m f(t)](s).$$

(6) **transformata pochodnej oryginału**
Jeżeli dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ funkcje $f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t)$ (dla $t > 0$), $n = 1, \ldots, m-1$, są oryginałami oraz $f^{(m)}(t)$ jest ciągła na $(0, \infty)$, to istnieje $\mathcal{L}[f^{(m)}(t)](s)$ oraz

$$\mathcal{L}[f^{(m)}(t)](s) = s^m\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{m-1}f(0+) - s^{m-2}f'(0+) - \ldots - sf^{(m-2)}(0+) - f^{(m-1)}(0+).$$

(7) **całka obrazu**

$$\int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](x)dx = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s).$$

(8) **transformata całki oryginału**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s}.$$

(9) **transformata splotu oryginałów** (tw. Borela o splotach)

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$$

(W przypadku oryginałów splot $(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(s)g(t-s)ds$.)

Przykłady do zad. 3.2

Tabela: Własności transformaty Laplace'a

	Oryginał $h(t)$	Obraz $\mathcal{L}[h(t)](s)$	Uwagi
liniowość	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha\mathcal{L}[f(t)](s) + \beta\mathcal{L}[g(t)](s)$	
przesunięcie w dziedzinie oryginału	$\chi(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$	$a > 0$
przesunięcie w dziedzinie obrazu	$f(t)e^{-at}$	$\mathcal{L}[f(t)](s+a)$	$a \in \mathbb{R}$
skalowanie	$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$
pochodna obrazu	$(-1)^m t^m f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]^{(m)}(s)$	$m \in \mathbb{N}$
pochodna oryginału	$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f(t)](s) - \sum\limits_{k=1}^{m} s^{m-k}f^{(k-1)}(0+)$	$m \in \mathbb{N}$
całka obrazu	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](x)dx$	
transformata całki oryginału	$\int\limits_0^t f(x)dx$	$\frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s}$	
splot	$(f * g)(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$	

Przykłady dodatkowe

- Wiemy, że $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}$.

  Zatem $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](s) = \int\limits_s^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg}(x)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(s)$.

- Wiemy, że $\mathcal{L}[\mathrm{sh}t](s) = \frac{1}{s^2-1}$.

  Zatem $\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{sh}t}{t}\right](s) = \int\limits_s^\infty \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_s^\infty \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$

  $= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|}\Big|_s^\infty = -\frac{1}{2}\ln\frac{|s-1|}{|s+1|}$.

Jednoznaczność przekształcenia Laplace'a

Twierdzenie.

Jeżeli $f(t)$, $g(t)$ są oryginałami ciągłymi na $[0, \infty)$
oraz $\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$ dla każdego s,
to $f(t) = g(t)$ dla każdego t.

Uwagi.

- Założenie ciągłości można osłabić.
- Wystarczy równość transformat dla wszystkich s postaci $s = a + iy$, $y \in \mathbb{R}$, dla pewnego a.
- Twierdzenie odwrotne jest oczywiście prawdziwe, nawet bez założenia ciągłości oryginałów.
- Definiuje się odwrotną transformatę Laplace'a, ale jest to bardziej skomplikowane technicznie od przypadku transformaty Fouriera.

Przykłady do zad. 3.3

Tabela: Transformaty Laplace'a podstawowych funkcji

(podana postać oryginału dla $t \geqslant 0$; dla $t < 0$ $f(t) = 0$)

oryginał $f(t)$	**obraz $\mathcal{L}[f(t)](s)$**
$\chi(t)$	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^t	$\frac{1}{s-1}$
e^{-t}	$\frac{1}{s+1}$
$\sin t$	$\frac{1}{s^2+1}$
$\cos t$	$\frac{s}{s^2+1}$
$\delta(t)$	1

RACHUNEK OPERATOROWY: ZASTOSOWANIA TRANSFORMATY LAPLACE'A DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Mogą to być:

- równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach (jakie pojawiają się często podczas opisu układów elektrycznych, mechanicznych czy też układów automatyki)
- równania różniczkowe cząstkowe, pewne klasy równań całkowych czy też różniczkowo-całkowych (np. te opisujące linie długie - obwody elektryczne, których rozmiary geometryczne powodują opóźnienia istotnie wpływające na zachowanie układu).

W wielu przypadkach zastosowanie transformaty Laplace'a sprowadza problem rozwiązania równania różniczkowego do problemu rozwiązania pewnego liniowego równania algebraicznego.

SCHEMAT METODY OPERATOROWEJ:

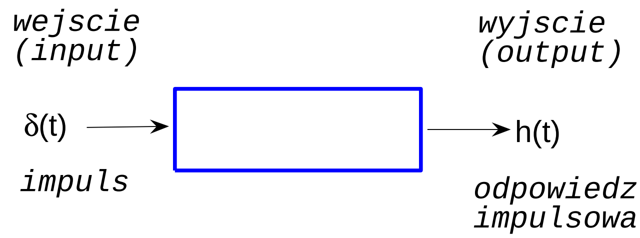
1. Mamy równanie różniczkowe dla oryginału.
2. Wykorzystując własności transformaty Laplace'a układamy równanie algebraiczne dla obrazu.
3. Z otrzymanego równania wyznaczamy obraz.
4. Na podstawie obrazu wyznaczamy oryginał.

Przykłady do zad. 3.4

TRANSMITANCJA

- **Układy liniowe niezmienne ze względu na przesunięcia w dziedzinie czasu** - układy (mechaniczne, automatycznego sterowania, obwody elektryczne) opisane układami liniowymi z parametrami (jak wartości pojemności, indukcyjności, oporności itp.) niezmiennymi w czasie.
- W przypadku takich układów (obwodów) elektrycznych transformata Laplace'a dowolnego napięcia lub prądu w układzie jest liniową kombinacją transformat napięć (prądów) wymuszających oraz warunków początkowych występujących na pojemnościach (napięcia) i indukcyjności (prądów).

- **Odpowiedź impulsowa układu liniowego i jej związek ze splotem funkcji**:



Wtedy

Wynika to z tego, że $x(t)$ możemy przybliżać kombinacją liniową delt Diraca:

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon x(n\varepsilon)\delta(t - n\varepsilon)$$

dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$.

Z liniowości i niezmienności w czasie rozważanego układu odpowiedź na sygnał $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon x(n\varepsilon)\delta(t-n\varepsilon)$ to $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon x(n\varepsilon)h(t-n\varepsilon) \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds = x * h(t) = y(t)$.

Przykład.

Wiemy, że dla danego układu liniowego związek między sygnałem wejściowym $x(t)$ a odpowiedzią $y(t)$ na wyjściu ma postać

$$y^{'}(t) + 2y(t) = 2x(t).$$

Zatem odpowiedź impulsowa $h(t)$ na impuls $\delta(t)$ spełnia równanie różniczkowe

$$h^{'}(t) + 2h(t) = 2\delta(t),$$

przy czym $h(t) = 0$ dla $t < 0$. Zatem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[h^{'}] + 2\mathcal{L}[h] &= 2\mathcal{L}[\delta(t)] \\
(s+2)\mathcal{L}[h] &= 2 \\
\mathcal{L}[h] &= \frac{2}{s+2} \\
h(t) &= 2e^{-2t}\chi(t)
\end{aligned}$$

Jeżeli chcemy znaleźć odpowiedź układu na sygnał $x(t) = \chi(t)$, wystarczy teraz wyznaczyć splot:

$$y(t) = x * h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(s)h(t-s)ds = \int\limits_{0}^{t} 2e^{-2t}e^{2s}ds = (1 - e^{-2t})\chi(t).$$