

To jest część obowiązkowa, na której napisanie jest 80 minut, czyli do 9:20. Proszę o samodzielną pracę. Proszę wysłać zdjęcia lub skany rozwiązań zadań oraz **wszystkich brudnopisów (oznaczonych wyraźnie jako brudnopis)** mailem do 9:25. Zadania z części B pojawią się o 9:35. Ogólne pytania organizacyjne można zadawać na czacie w pokoju 'FA (wykład)' na <https://matematyka.wroclaw.pl/>

Odpowiedzi należy uzasadniać. Powodzenia!

1. Przypomnij rozwinięcie funkcji \cos w szereg potęgowy. Oblicz $\sin(-i - \frac{\pi}{4})$, wynik przedstaw w postaci algebraicznej ($x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$) bez użycia π .
2. Przypomnij definicję indeksu. Korzystając ze znanych własności indeksu, oblicz $\text{Ind}_\gamma(1)$, jeśli $\gamma(t) = 2e^{-it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.
3. Przypomnij definicję $\text{res}(f, a)$. Znajdź wszystkie bieguny funkcji $f(z) = \frac{2}{(z-i)^4} + \frac{1}{z+3}$ i oblicz residua w tych punktach.
4. Oblicz $\int_\gamma \frac{\cos z \, dz}{(z+i)^4}$, gdzie $\gamma(t) = 1 + 2e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (Uwaga na dwójkę w wykładniku eksponenty!) Wynik przedstaw w postaci algebraicznej. *Wskazówka.* Wzór Cauchy'ego.
5. Co to znaczy, że funkcja jest całkowita? Sformułuj twierdzenie Liouville'a.
6. Przypomnij definicję zbieżności niemal jednostajnej. Niech

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^3}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sprawdź, że iloczyn ten zbiega niemal jednostajnie na \mathbb{C} . Znajdź wszystkie zera funkcji f (nie trzeba znajdować ich krotności).

7. Przypomnij równania Cauchy–Riemanna (w jakiegokolwiek wersji). Sprawdź, że *nie* spełniają ich funkcja $f(z) = \bar{z}$.
8. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$.

Zadanie 8 jest za 10 punktów, a pozostałe po 3 punkty, łącznie do zdobycia jest 31 punktów. Proszę o informację nt. możliwych terminów egzaminu ustnego, np. w jakich dniach, w jakich godzinach itp., najlepiej na kartce z rozwiązaniami zadań z egzaminu.

Proszę też o informację, czy Pani/Pan bardzo chce zdawać egzamin ustny jeszcze dzisiaj.