Egzamin poprawkowy z funkcji analitycznych   6 VII 2020

To jest część obowiązkowa, na której napisanie jest 80 minut, czyli do 9:20. Proszę o samodzielną pracę. Proszę wysłać zdjęcia lub skany rozwiązań zadań oraz **wszystkich brudnopisów (oznaczonych wyraźnie jako brudnopis)** mailem do 9:25. Zadania z części B pojawią się o 9:35. Ogólne pytania organizacyjne można zadawać na czacie w pokoju 'FA (wykład)' na https://matematyka.wroclaw.pl/

Odpowiedzi należy uzasadniać. Powodzenia!

1. Przypomnij rozwinięcie funkcji sin w szereg potęgowy. Oblicz $\cos(-i-\frac{\pi}{4})$, wynik przedstaw w postaci algebraicznej ($x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$) bez użycia π.

2. Przypomnij definicję indeksu. Korzystając ze znanych własności indeksu, oblicz $\mathrm{Ind}_\gamma(i)$, jeśli $\gamma(t) = 3 - 2e^{-it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

3. Przypomnij definicję $\mathrm{res}(f, a)$. Znajdź wszystkie bieguny funkcji $f(z) = \dfrac{3}{(z+i)^4} + \dfrac{i}{z-2}$ i oblicz residua w tych punktach.

4. Oblicz $\int_\gamma \dfrac{\sin z\, dz}{(z-i)^4}$, gdzie $\gamma(t) = 1 + 3e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (Uwaga na dwójkę w wykładniku eksponenty!) Wynik przedstaw w postaci algebraicznej. *Wskazówka.* Wzór Cauchy'ego.

5. Sformułuj twierdzenie Morery.

6. Przypomnij definicję zbieżności niemal jednostajnej. Niech
$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{n^{3/2}}), \quad z \in \mathbb{C}.$$
Sprawdź, że iloczyn ten zbiega niemal jednostajnie na $\mathbb{C}$. Znajdź wszystkie zera funkcji f (nie trzeba znajdować ich krotności).

7. Przypomnij równania Cauchy–Riemanna (w jakiejkolwiek wersji). Sprawdź, że spełnia je funkcja $f(z) = (z+1)^2$.

8. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całkę $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

Zadanie 8 jest za 10 punktów, a pozostałe po 3 punkty, łącznie do zdobycia jest 31 punktów.