

To jest część obowiązkowa, na której napisanie jest 80 minut, czyli do 11:20. Proszę o samodzielną pracę. Proszę wysłać zdjęcia lub skany rozwiązań zadań oraz **wszystkich brudnopisów (oznaczonych wyraźnie jako brudnopis)** mailem do 11:25. Zadania z części B pojawią się o 11:35.

Odpowiedzi należy uzasadniać. Powodzenia!

1. Przypomnij rozwinięcie funkcji \cos w szereg potęgowy. Oblicz $\sin(2i + \frac{\pi}{3})$, wynik przedstaw w postaci algebraicznej ($x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$) bez użycia π .
2. Przypomnij definicję indeksu. Korzystając ze znanych własności indeksu, oblicz $\text{Ind}_\gamma(2)$, jeśli $\gamma(t) = 1 + 2e^{-it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.
3. Funkcja $f : D(2, 3) \rightarrow D(2, 3)$ jest holomorficzną. Uzasadnij, że $|f''(2)| < 1$. A jaką nierówność spełnia $|f^{(3)}(1)|$? *Wskazówka.* Nierówności Cauchy'ego.
4. Czy istnieje funkcja całkowita, która ma zera *tylko* w punktach postaci (a) $z_n = n - \frac{1}{n}$; (b) $z_n = e^{-n}$; gdzie $n = 1, 2, \dots$
5. Sformułuj twierdzenie o odwzorowaniu otwartym.
6. Podaj przykłady funkcji $f_1, f_2, f_3 \in H(D'(a, 1))$, które w punkcie a mają, odpowiednio: (1) osobliwość pozorną; (2) biegun rzędu 3; (3) osobliwość istotną.
7. Przypomnij równania Cauchy–Riemanna (w jakiegokolwiek wersji). Sprawdź, że spełnia je funkcja $f(z) = z(z - 3)$.
8. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.

Zadanie 8 jest za 10 punktów, a pozostałe po 3 punkty, łącznie do zdobycia jest 31 punktów.