Algebra liniowa z geometrią analityczną – przykładowe zadania na egzamin

1. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażenia $(x - \frac{1}{\sqrt{x}})^5$.
2. Obliczyć $(2-2i)^{17}$, $(-1+\sqrt{3}i)^{17}$; wynik podać w postaci algebraicznej bez użycia funkcji trygonometrycznych.
3. Znaleźć wszystkie $z \in \mathbf{C}$ spełniające równanie: (a) $z^4 = -1 - \sqrt{3}i$; (b) $(z-i)^3 = (z+1)^3$; (c) $z^4 - z^2 - 6 = 0$.
4. Rozłożyć wielomian $x^6 + 3$ na czynniki rzeczywiste nierozkładalne.
5. Rozłożyć funkcję wymierną f na sumę wielomianu i ułamków prostych, jeśli (a) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3}$; (b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3+2x^2+4x}$; (c) $f(x) = \frac{x^4+2}{x^4-2}$.
6. Obliczyć wyznacznik macierzy
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & -5 & 7 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$
7. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy A i sprawdzić poprawność wyniku obliczając AA^{-1}, jeśli
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
8. Dla jakich wartości parametru p układ równań z niewiadomymi x, y, $z \in \mathbf{R}$,
$$\begin{cases} px + y + 2z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + pz = 0 \end{cases}$$
(a) ma dokładnie jedno rozwiązanie; (b) jest sprzeczny; (c) ma nieskończenie wiele rozwiązań; (d) ma rozwiązania niezerowe; (e) ma dokładnie dwa rozwiązania.
9. Niech $P = (1,3)$, $l_1 = \{(x,y) : 2x - y = 1\}$, $l_2 = \{(-t-1, -2t) : t \in \mathbf{R}\}$, $l_3 = \{(1-t, 3t) : t \in \mathbf{R}\}$. Obliczyć odległości: $d(P, l_2)$, $d(l_1, l_2)$, $d(l_1, l_3)$. Znaleźć punkt przecięcia prostych l_2 i l_3 oraz kąt między nimi.
10. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1,3)$, $B = (0,1)$, $C = (-3,-3)$. Znaleźć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A.
11. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1,3,2)$, $B = (0,1,4)$, $C = (-3,-3,2)$. Znaleźć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B.
12. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (1,3,2)$, $B = (0,1,4)$, $C = (-3,-3,2)$, $D = (2,2,10)$. Znaleźć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C.
13. Niech $P = (1,2,3)$, $l_1 = \{(t, -t, 1+t) : t \in \mathbf{R}\}$, $l_2 = \{(x,y,z) : x + y + 2 = 0,\ y + z = 1\}$, $l_3 = \{(2t-1, -t, 3t-1) : t \in \mathbf{R}\}$, $l_4 = \{(0, 3t+1, 4t) : t \in \mathbf{R}\}$. Znaleźć:
   (a) odległość P od l_1; odległość P od l_2; rzut prostokątny P na l_1;
   (b) punkt przecięcia l_1 i l_3 oraz kąt między nimi;
   (c) odległość między l_1 i l_2;
   (d) odległość między l_1 i l_4.
14. Niech dodatkowo $\pi_1 : x + y + z + 1 = 0$, $\pi_2 = \{(s-1, s+4t+2, -s-3t) : s,t \in \mathbf{R}\}$, $\pi_3 = \{(s-1, -s+t+2, t+4) : s,t \in \mathbf{R}\}$. Znaleźć:
   (a) odległość P od π_1 i od π_2; rzut prostokątny P na π_1 i na π_2;
   (b) punkt wspólny l_1 i π_1 oraz kąt między nimi; kąt pomiędzy π_1 i π_2;
   (c) odległość między l_4 i π_3;
   (d) odległość między π_2 i π_3.
15. Zbadać, czy wektory
   (a) $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,1,1)$, $u_3 = (1,-2,2)$ w $X = \mathbf{R}^3$;
   (b) $u_1 = (1,2,3,-1)$, $u_2 = (1,1,1,0)$, $u_3 = (1,-2,2,4)$ w $X = \mathbf{R}^4$
   są liniowo niezależne. Czy tworzą onę bazę przestrzeni X?
16. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni
$$A = \{(x,y,z,t) : x + y + z = 0,\ x - 2t = 0\}; \qquad B = \{(x,y,z,t) : x + y = 0,\ x - 2t = 0\, y + 2t = 0\}.$$
17. Zbadać, czy przekształcenia $F_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 0)$, $F_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2$ są liniowe. Jeśli tak, znaleźć macierz przekształcenia w standardowych bazach.

18. Znaleźć macierz przekształcenia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, które jest: (a) obrotem o kąt $\pi/4$ względem $(0,0)$; (b) symetrią względem prostej $x + y = 0$; (c) symetrią względem prostej $x - 3y = 0$; (d) rzutem prostokątnym na prostą $x = y$. Znaleźć wszystkie wektory i wartości własne tych przekształceń.
19. Znaleźć wektory i wartości własne przekształcenia $F(x,y) = (x + 3y, 2x)$.
20. Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

21. Znaleźć liczbę rozwiązań układu równań z niewiadomymi x, y, z, t, u,

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x - z + u = 3 \\ 5x + y - z + t + 2u = a \end{cases}$$

w zależności od parametru a.
22. Znaleźć środek i promień okręgu $x^2 + 3x + y^2 + 4y - 2 = 0$.
23. Znaleźć środek, ogniska i długości półosi elipsy $x^2 + 3x + 2y^2 + 4y - 2 = 0$. Wykonać rysunek.
24. Znaleźć osie, współrzędne ognisk oraz równania asymptot hiperboli (a) $x^2 - 2x + 2y^2 = 3$; (b) $2x^2 - y^2 = 2$. Wykonać rysunek.
25. Znaleźć ognisko, wierzchołek i kierownicę paraboli (a) $x^2 + 2x - y = 3$; (b) $2y^2 - 4y + x = 2$. Wykonać rysunek.
26. Napisać równanie elipsy o ogniskach $F_1 = (-3,1)$, $F_2 = (-3,5)$ i jednym z wierzchołków w punkcie $W = (-3,0)$. Znaleźć długości półosi tej elipsy. Wykonać rysunek.
27. Napisać równanie elipsy o ogniskach $F_1 = (3,1)$, $F_2 = (7,1)$ i jednym z wierzchołków w punkcie $W = (9,1)$. Znaleźć długości półosi tej elipsy. Wykonać rysunek.