T O P O L O G I A O G Ó L N A

WPPT
WYKŁAD 14
Topologie w przestrzeniach funkcji ciągłych,
Twierdzenie Stone'a–Weierstrassa

Niech X i Y oznaczają przestrzenie topologiczne, zaś $C(X,Y)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji ciągłych z X w Y. W zbiorze tym mamy do czynienia z kilkoma naturalnymi topologiami, które w tym wykładzie omówimy.

Topologia zbieżności punktowej. Oczywiście $C(X,Y)$ jest podzbiorem zbioru wszystkich funkcji z X w Y, czyli przestrzeni produktowej $\prod_{x\in X} Y_x$, $Y_x = Y$ dla wszystkich $x \in X$, którą też zapisuje się jako Y^X. Zatem mamy tu topologię Tichonowa, w której, jak wiemy, zbieżność (ciągów, lub ogólniej netów, funkcji) odpowiada zbieżności punktowej. Dlatego stosujemy alternatywnie nazwę *topologia zbieżności punktowej*. Na potrzeby tego wykładu topologię tę oznaczymy przez $\mathcal{T}_p$. Jeśli Y jest zwarta, to całe Y^X też jest zwarte, jednak zbiór funkcji ciągłych $C(X,Y)$ na ogół zwarty (czyli domknięty) w tej topologii nie jest. Łatwo bowiem o przykład ciągu funkcji ciągłych zbieżnego punktowo do funkcji nieciągłej.

Topologia zbieżności jednostajnej. Teraz wymagane jest, aby Y była przestrzenią metryczną (metrykę oznaczymy tradycyjnie przez d). Wtedy w $C(X,Y)$ można wprowadzić metrykę (dobrze już znaną)

$$d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), f(y)).$$

Bazą otoczeń w punkcie (funkcji) f jest rodzina kul

$$B_{\sup}(f,\epsilon) = \{g \in C(X,Y) : \forall_{x\in X}\ d(f(x), g(x)) < \epsilon\}.$$

Zbieżność (ciągu lub netu f_κ, ale że jesteśmy w przestrzeni metrycznej, w większości zagadnień wystarczy rozważać ciągi) w tej metryce określamy mianem *zbieżności jednostajnej* i oznaczamy symbolem $f_\kappa \rightrightarrows f$. Podobnie jak poprzednio, metrykę (i topologię) można rozszerzyć na zbiór wszystkich funkcji z X w Y. Topologię tę oznaczymy przez $\mathcal{T}_j$. Tym razem, nawet jeśli X i Y są zwarte, przestrzeń X^Y na ogół nie jest zwarta w tej topologii. Podobnie zwarta nie jest $C(X,Y)$. Kryterium zwartości pozbioru $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ dostarcza znane twierdzenie Arzeli–Ascoliego.

Twierdzenie (Arzelà–Ascoli). Zbiór $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ funkcji ciągłych z przestrzeni zwartej X w przestrzeń metryczną Y jest warunkowo zwarty (czyli całkowicie ograniczony) w metryce supremum, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego elementy (funkcje) są wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe.

(Jednakowa ciągłość oznacza istnienie, dla każdego $x \in X$ i $\epsilon > 0$, otoczenia punktu $x \in X$, na którym każda z funkcji $f \in \mathcal{F}$ waha się o nie więcej niż ϵ.)

Dowód pomijamy — jest on taki sam jak na podstawowym kursie z Analizy.

Prostą obserwacją jest, że ciąg (lub net) zbieżny jednostajnie jest też zbieżny punktowo, oczywiście do tej samej granicy (dotyczy to nie tylko funkcji ciągłych, ale dowolnych). To oznacza, że topologia zbieżności punktowej jest *słabsza* od topologii zbieżności jednostajnej (przypomnijmy, oznacza to, że $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_j$). Można się też o tym przekonać bezpośrednio, sprawdzając (co nie jest trudne), że każdy cylinder

z półbazy topologii produktowej, który jest postaci $C(\{x\}, U)$, jest sumą wszystkich kul $B_{\sup}(f, \epsilon)$, takich że $B(f(x), \epsilon)$ (kula w Y) jest zawarta w U. A więc $C(\{x\}, U) \in \mathcal{T}_j$, co implikuje dyskutowaną inkluzję topologii.

Oczywiście równości między tymi topologiami na ogół nie ma, gdyż łatwo o przykład ciągu funkcji zbieżnego punktowo ale nie jednostajnie.

Topologia zwarto-otwarta. Teraz zakładamy, że X jest przestrzenią Hausdorffa (i chwilowo nic więcej). Wprowadzimy topologię poprzez wskazanie półbazy (znowu można tę topologię określić w całej przestrzeni produktowej Y^X, jednak my ograniczymy się do badania jej własności na $C(X, Y)$). Otóż elementami półbazy będą zbiory

$$C(A, U) = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subset U\},$$

gdzie A jest zwartym podzbiorem X, zaś U jest otwartym podzbiorem Y. Wystarczy wziąć za U raz Y raz $\emptyset$ (i wszystko jedno jaki A), aby w półbazie znaleźć całą przestrzeń $C(X, Y)$ oraz zbiór pusty. Zatem jest to półbaza. Bazę definiowanej *topologii zwarto-otwartej* stanowią skończone przekroje zbiorów postaci $C(A, U)$, które możemy oznaczać jako $C(A_1, \ldots, A_n,\ U_1, \ldots, U_n)$ (jest to zgodne z wcześniejszym oznaczeniem cylindrów nad skończonym zbiorem współrzędnych). Topologię tę oznaczymy przez $\mathcal{T}_{\text{z-o}}$.

Fakt. Topologia zbieżności punktowej jest słabsza od topologii zwarto-otwartej, która z kolei (w przypadku, gdy Y jest przestrzenią metryczną) jest słabsza od topologii zbieżności jednostajnej: $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{\text{z-o}} \subset T_j$.

Dowód. Pierwsza inkluzja wynika z tego, że cylindry $C(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_n)$ półbazy dla $\mathcal{T}_p$ są elementami półbazy dla $\mathcal{T}_{\text{z-o}}$, o ile tylko zbiory jednoelementowe są zwarte w X. To sobie zapewniliśmy zakładając, że X jest przestrzenią Hausdorffa.

Druga inkluzja wyniknie natychmiast z twierdzenia podanego poniżej. $\square$

Twierdzenie. Niech Y będzie przestrzenią metryczną. Wtedy net funkcji $(f_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ elementów przestrzeni $C(X, Y)$ zbiega do $f \in C(X, Y)$ w topologii zwarto-otwartej wtedy i tylko wtedy, gdy zbiega on do f *niemal jednostajnie*, to znaczy na każdym zbiorze zwartym $A \subset X$ mamy zbieżność jednostajną $f_\kappa|_A \rightrightarrows f|_A$. (W szczególności zbieżność w $\mathcal{T}_j$ implikuje zbieżność w $\mathcal{T}_{\text{z-o}}$).

Dowód: Niech net (f_κ) zbiega niemal jednostajnie do f. Pokażemy zbieżność w $\mathcal{T}_{\text{z-o}}$. Ustalmy otoczenie f w tej topologii, a w nim zawarte otoczenie bazowe $C(A_1, \ldots, A_n, U_1, \ldots, U_n)$. Każdy ze zbiorów $f(A_i)$ jest zwarty, więc siedzi w otwartym zbiorze U_i z pewnym swoim ϵ_i-otoczeniem. Niech $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. Zbiór $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ jest zwarty, zatem zachodzi na nim jednostajna zbieżność $f_\kappa|_A \rightrightarrows f|_A$, co oznacza, że od pewnego indeksu κ_0 wszystkie funkcje f_κ różnią się na A od f o mniej niż ϵ, co implikuje, że $f_\kappa(A_i) \subset U_i$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Czyli $f_\kappa \in C(A_1, \ldots, A_n, U_1, \ldots, U_n)$, co dowodzi, że nasz net (f_κ) zbiega do f w topologii $\mathcal{T}_{\text{z-o}}$.

Na odwrót, niech (f_κ) zbiega do f w $\mathcal{T}_{\text{z-o}}$. Ustalmy zbiór zwarty A i $\epsilon > 0$. Mamy pokazać, że powyżej pewnego indeksu κ_0 zachodzi $d(f_\kappa(x), f(x)) < \epsilon$, dla wszystkich $x \in A$. Każdy punkt $x \in A$ posiada otoczenie U_x, takie że w każdym punkcie $x' \in U_x$ mamy $d(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{2}$. Zbiory U_x pokrywają A, więc istnieje wybrane z nich podpokrycie skończone $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Zbiory $A_i = \overline{U_{x_i}} \cap A$ są zwarte, stąd zbiór $C(A_1, \ldots, A_n, B(f(x_1), \frac{\epsilon}{2}), \ldots, B(f(x_n), \frac{\epsilon}{2}))$ jest bazowym otoczeniem f w topologii $\mathcal{T}_{\text{z-o}}$. Zatem powyżej pewnego indeksu κ_0, wszystkie funkcje f_κ wpadają do tego zbioru. Niech $\kappa \geq \kappa_0$ i rozważmy dowolny punkt $x \in A$. Punkt ten należy do któregoś ze zbiorów U_i, co implikuje $d(f(x_i), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Oczywiście x

należy też do A_i, co z kolei implikuje $f_\kappa(x) \in B(f(x_i), \frac{\epsilon}{2})$, czyli $d(f_\kappa(x), f(x_i)) < \frac{\epsilon}{2}$. Ostatecznie więc

$$d(f_\kappa(x), f(x)) \leq d(f_\kappa(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \epsilon. \qquad \square$$

Wniosek. Jeśli X jest przestrzenią *zwartą* Hausdorffa (a Y przestrzenią metryczną), to ponieważ na zbiorze zwartym zbieżność niemal jednostajna jest jednostajna, przeto topologie zwarto-owarta i zbieżności jednostajnej są tożsame.

Zadanie. Sprawdź, że bazą w punkcie $f \in C(X, Y)$ topologii zbieżności niemal jednostajnej są zbiory

$$B(f, A, \epsilon) = \{g \in C(X, Y) : \forall_{x \in A}\ d(f(x), g(x)) < \epsilon\},$$

gdzie $\epsilon > 0$, a A jest zwartym podzbiorem X.

Przez $C(X)$ oznaczać będziemy przestrzeń rzeczywistych (lub, jeśli kto woli, zespolonych) funkcji ciągłych na przestrzeni topologicznej X (czyli $C(X, \mathbb{R})$ lub $C(X, \mathbb{C})$). Rodzinę funkcji $\mathcal{A} \subset C(X)$ nazwiemy *algebrą*, jeśli jest ona przestrzenią liniową (nad $\mathbb{R}$ lub, jeśli kto woli, nad $\mathbb{C}$) i dodatkowo jest zamknięta na mnożenie funkcji przez siebie. Jeśli $\mathcal{D}$ jest podzbiorem $C(X)$, to przez $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ oznaczać będziemy najmniejszą algebrę zawierającą $\mathcal{D}$ (jest ona uzyskana jako przekrój wszystkich algebr zawierających $\mathcal{D}$ — w najgorszym razie jest to całe $C(X)$). Przez $\mathcal{A}^*(\mathcal{D})$ oznaczymy *algebrę symetryczną* generowaną przez $\mathcal{D}$, to znaczy najmniejszą algebrę zawierającą $\mathcal{D}$ i zamkniętą na branie sprzężenia zespolonego. De facto $\mathcal{A}^*(\mathcal{D}) = \mathcal{A}(\mathcal{D} \cup \overline{\mathcal{D}})$, gdzie $\overline{\mathcal{D}} = \{\overline{f} : f \in \mathcal{D}\}$. W przypadku rzeczywistym $\mathcal{A}^*(\mathcal{D}) = \mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Powiemy, że zbiór $\mathcal{D} \subset C(X)$ *rozdziela punkty*, jeśli dla dowolnych $x, y \in X$, $x \neq y$ istnieje $f \in \mathcal{D}$, taka że $f(x) \neq f(y)$.

Twierdzenie Stone'a–Weierstrassa (wersja ogólna). Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa (nie koniecznie zwartą). Niech $\mathcal{D} \subset C(X)$. Jeśli $\mathcal{D}$ rozdziela punkty i zawiera przynajmniej jedną niezerową funkcję stałą, to $\mathcal{A}^*(\mathcal{D})$ jest gęsta w $C(X)$ w topologii zwarto-otwartej.

Dowód: Zaczniemy od dwóch lematów.

Lemat. Funkcja rzeczywista y_∞ określona na $[0, 1]$ wzorem $y_\infty(x) = \sqrt{x}$ jest na tym przedziale jednostajną granicą ciągu wielomianów rzeczywistych.

Dowód: Skorzystamy z twierdzenia Diniego, które mówi, że ciąg funkcji ciągłych zbieżny (punktowo) monotonicznie do funkcji ciągłej zbiega do niej jednostajnie. Na $[0, 1]$ określmy rekurencyjnie ciąg funkcji: $y_0 \equiv 0$ oraz, dla $n \geq 0$,

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \tfrac{x}{2} - \tfrac{(y_n(x))^2}{2}\ .$$

Pokażemy, że (na $[0, 1]$) ciąg ten jest niemalejący i ograniczony z góry przez funkcję y_∞. Mianowicie mamy $y_1(x) = \frac{x}{2}$, zatem

$$(*) \qquad y_0(x) \leq y_1(x) \leq y_\infty(x).$$

A dalej widzimy, że przy ustalonym x funkcja kwadratowa

$$\Psi_x(y) = y + \tfrac{x}{2} - \tfrac{y^2}{2}$$

jest niemalejąca na $[0, 1]$ (sprawdzić pochodną). Widać też, że $\Psi_x(y_\infty(x)) = y_\infty(x)$. Nakładając funkcję Ψ_x na nierówności (*) dostaniemy $y_1(x) \leq y_2(x) \leq y_\infty(x)$,

a nakładając ją ponownie wiele razy, dostaniemy $y_n(x) \leq y_{n+1}(x) \leq y_\infty(x)$. Z wykazanej monotoniczności i ograniczoności wynika, że ciąg funkcji y_n zbiega punktowo do jakiejś funkcji granicznej g. Ponieważ dla każdego $x \in [0,1]$ funkcja Ψ_x jest ciągła, wartość graniczna $g(x)$ musi być punktem stałym dla Ψ_x, a jedynym takim punktem jest $y_\infty(x) = \sqrt{x}$. To determinuje, że ciąg (y_n) zbiega do y_∞. Ponieważ funkcja graniczna jest ciągła, twierdzenie Diniego daje zbieżność jednostajną. $\square$

Lemat. Niech $\mathcal{A} \subset C(X)$ będzie algebrą funkcji rzeczywistych zawierającą funkcje stałe. Wtedy dla dowolnych funkcji $f, g \in \mathcal{A}$ mamy $|f|, f \vee g, f \wedge g \in \overline{\mathcal{A}}$, gdzie domknięcie jest w topologii zwarto-otwartej.

Dowód: Ustalmy $f \in \mathcal{A}$, zbiór zwarty $A \subset X$ i $\epsilon > 0$. Funkcja ciągła jest na zbiorze zwartym ograniczona, zatem istnieje dodatnie M, takie że $(\frac{1}{M}f)^2$ przyjmuje na A wartości w $[0,1]$. Zatem, z poprzedniego lematu, funkcję

$$|f| = M\sqrt{(\tfrac{1}{M}f)^2}$$

można przybliżyć na A jednostajnie z dokładnością do ϵ wielomianem nałożonym na $(\frac{1}{M}f)^2$, który jest de facto wielomianem nałożonym na f. Ponieważ algebra $\mathcal{A}$ zawiera stałe, to każdy wielomian nałożony na f jest funkcją z $\mathcal{A}$. Czyli wykazaliśmy, że $|f|$ można na A przybliżyć jednostajnie z dokładnością do ϵ funkcją z $\mathcal{A}$. Innymi słowy $\mathcal{A}$ kroi się niepusto z dowolnym otoczeniem bazowym $B(|f|, A, \epsilon)$ funkcji $|f|$ (zob. zadanie powyżej) topologii zbieżności jednostajnej. Oznacza to, że $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$ w topologii zbieżności niemal jednostajnej, czyli w topologii zwarto-otwartej.

Przynależność funkcji $f \vee g$ i $f \wedge g$ do $\overline{\mathcal{A}}$ (gdy $f, g \in \mathcal{A}$) wynika teraz natychmiast z faktu, że $\overline{\mathcal{A}}$ jest przestrzenią liniowąoraz z równości $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ i $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. $\square$

Dowód twierdzenia Stone'a–Weierstrassa: Najpierw pokażemy, że dla każdych $x \neq y$ w X i $s, t \in \mathbb{R}$ istnieje $f_0 \in \mathcal{A}^*(\mathcal{D})$ rzeczywista, taka że $f_0(x) = s$, $f_0(y) = t$. Trzeba najpierw wziąć funkcję (być może zespoloną) $g \in \mathcal{D}$, która rozdziela x i y. Przynajmniej jedna z funkcji rzeczywistych $f + \overline{f} = 2\mathrm{Re}(f)$ lub $f - \overline{f} = 2\mathrm{I}m(f)$ je też rodziela, a obie te funkcje należą do $\mathcal{A}^*(\mathcal{D})$. Tak oto znaleźliśmy funkcję rzeczywistą (powiedzmy h) rozdzielającą x i y. Nakładamy na nią funkcję linową (rzeczywistą), której wykres przechodzi przez punkty $(h(x), s)$ i $(h(y), t)$. Takie nałożenie nadal należy do $\mathcal{A}^*(\mathcal{D})$ i spełnia wymogi na f_0.

Ustalmy dowolną funkcję rzeczywistą $f \in C(X)$, zbiór zwarty $A \subset X$, punkt $x \in A$ oraz $\epsilon > 0$. Skonstruujemy funkcję rzeczywistą $g_x \in \overline{\mathcal{A}^*(\mathcal{D})}$, taką że $g_x(x) = f(x)$ oraz $g_x < f + \epsilon$ na A. Z poprzedniego akapitu, dla każdego $y \in A$ mamy w $\mathcal{A}^*(\mathcal{D})$ funkcję rzeczywistą $g_{x,y}$ taką, że $g_{x,y}(x) = f(x)$ oraz $g_{x,y}(y) = f(y)$ (dla $x = y$ za $g_{x,y}$ można wziąć $g_{x,y'}$ dla jakiegokolwiek innego y'). Osłabmy drugą równość pisząc tylko $g_{x,y}(y) < f(y) + \epsilon$. Ponieważ obie funkcje są ciągłe, więc ta nierówność zachodzi na pewnym otoczeniu U_y punktu y. Otoczenia te pokrywają zbiór zwarty A, więc można z nich wybrać podpokrycie skończone $\{U_{y_1,\ldots,U_{y_n}}\}$. Teraz widać, że funkcja $g_x = g_{x,y_1} \wedge g_{x,y_2} \wedge \cdots \wedge g_{x,y_n}$, która na mocy drugiego lematu należy do $\overline{\mathcal{A}^*(\mathcal{D})}$, spełnia żądane wymogi.

Osłabmy równość $g_x(x) = f(x)$ pisząc $g_x(x) > f(x) - \epsilon$. Taka nierówność zachodzi na otoczeniu V_x punktu x. Teraz ,,uzmienniamy" punkt x (to znaczy w każdym punkcie x mamy skonstruowaną funkcję g_x i otoczenie V_x). Otoczenia te stanowią pokrycie zbioru zwartego A, więc ma ono podpokrycie skończone $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}\}$. Funkcja $g = g_{x_1} \vee g_{x_2} \vee \cdots \vee g_{x_m}$ spełnia nierówności $g < f + \epsilon$ oraz $g > f - \epsilon$ na całym zbiorze A. W ten sposób przybliżyliśmy funkcję f na zbiorze A, jednostajnie z dokładnością do ϵ, funkcją z $\overline{\mathcal{A}^*(\mathcal{D})}$. To dowodzi, że f należy do domknięcia (w

topologii niemal jednostajnej zbieżności, czyli zwarto-otwartej) tej algebry, ale że ona już jest domknięta, to f należy bezpośrednio do niej.

Ostatni krok, to obserwacja, że w przypadku zespolonym każda funkcja $f \in C(X)$ rozkłada się na sumę części rzeczywistej i urojonej pomnożonej przez i. Każda z tych części należy do $\overline{\mathcal{A}^*(\mathcal{D})}$, bo to pokazaliśmy już dla funkcji rzeczywistych. W przypadku zespolonym $\overline{\mathcal{A}^*(\mathcal{D})}$ jest przestrzenią liniową zespoloną, więc można w niej mnożyć przez i. Zatem $f \in \overline{\mathcal{A}^*(\mathcal{D})}$. Wykazaliśmy, że $C(X) = \overline{\mathcal{A}^*(\mathcal{D})}$, co kończy dowód. $\square$

Tomasz Downarowicz