Wstęp do topologii MAP1212
Wykład 2
Zbieżność. Zbiory ograniczone. Punkty skupienia.

1. Zbieżność w przestrzeniach metrycznych

Rozważamy abstrakcyjną przestrzeń metryczną (X, d). Przypomnijmy z poprzedniego wykładu, że:

Definicja 1. Ciąg (x_n) elementów przestrzeni (X, d) jest *zbieżny*, gdy $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Punkt x nazywamy wtedy *granicą* ciągu (x_n). Oznaczamy $\lim_n x_n = x$ lub $x_n \to x$.

Równoważnie, $x_n \to x$, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że dla wszystkich $n > n_0$ zachodzi $x_n \in K(x, \epsilon)$. Tę definicję będzie się w przyszłości wygodnie uogólniać.

Twierdzenie 1. Każdy ciąg zbieżny (w przestrzeni metrycznej) ma dokładnie jedną granicę.

Proof. Gdyby były dwie granice x i y, to dla $r = \frac{1}{2}d(x, y)$ kule $K(x, r)$, $K(y, r)$ nie mogłyby być rozłączne, gdyż każda zawiera prawie wszystkie elementy ciągu. Inaczej, jeśli $x_n \to x$ i $x_n \to y$, to

$$0 \le d(x, y) \le \underbrace{d(x, x_n)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{d(x_n, y)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

□

Twierdzenie 2. Każdy ciąg stały jest zbieżny.

Twierdzenie 3. Każdy podciąg ciągu zbieżnego do x jest zbieżny do tej samej granicy x.

Dowody oczywiste.

Twierdzenie 4. Jeżeli każdy podciąg ciągu (x_n) zawiera podciąg zbieżny do x, to $x_n \to x$.

Proof. Przypuśćmy niewprost, że (x_n) nie jest zbieżny do x mimo, iż spełnia założenie. Wtedy istnieje r takie, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n) nie należy do $K(x, r)$. Te wyrazy tworzą podciąg, który nie zawiera podciągu zbieżnego do x. □

Przykłady

1. W metryce dyskretnej zbieżne są tylko ciągi stałe.
2. W metryce $\rho(m, n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ na $\mathbb{N} \cup \{0\}$ z poprzedniego wykładu każdy podciąg ciągu $\mathbb{N}$ jest zbieżny do zera.
3. W metryce „mur” ciąg $\frac{1}{n}$ nie jest zbieżny do 0.
4. Co można powiedzieć o ciagach funkcji $f_n(x) = \frac{1}{n}x$, $g_n(x) = nx$, $h_n(x) = x^n$ w przestrzeni $C([0, 1])$?

Definicja 2. *Średnicą* zbioru $A \subset X$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in A\}$$

Średnicę często oznacza się też przez $\delta(A)$.

Definicja 3. Zbiór A nazywamy *ograniczonym*, gdy istnieją $x_0 \in X$ i $r > 0$, dla których $A \subset K(x_0, r)$.

Równoważnie można zażądać, by średnica była skończona, ale powyższą definicję lepiej będzie później uogólniać. Powyższe definicje można używać także w kontekście przestrzeni, np. przestrzeń $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \rho)$ z „metryka zbieżności do 0" jest ograniczona, a jej średnicą jest 1.

Definicja 4. Niech (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Funkcja $f\colon X \to Y$ jest *ograniczona*, gdy zbiór $f(X)$ jest ograniczony w Y (równoważnie $\operatorname{diam}(f(X)) < \infty$).

Ta definicja dotyczy w szczególności ciągów.

Twierdzenie 5. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Proof. Wystarczy wziąć kulę $K(x, 1)$, gdzie x jest granicą rozważanego ciągu (x_n), znaleźć n_0, począwszy od którego wszystkie wyrazy ciągu zawierają się w $K(x, 1)$, a nastepnie zauważyć, że cały ciąg zawiera się w kuli $K(x, r)$, gdzie $r = \max\{1, d(x, x_1), ..., d(x, x_{n_0})\}$. □

2. Punkty skupienia.

Na analizie definiowano punkt skupienia ciągu jako granicę zbieżnego podciągu. Przy tym pozwalano, by punktami skupienia były $\pm\infty$ mimo, że nie są to elementy przestrzeni $\mathbb{R}$. My wprowadzimy ogólniejszą definicję.

Definicja 5. Punkt x jest punktem skupienia zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d), gdy dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$A \cap \big(K(x, \epsilon) \setminus \{x\}\big) \neq \phi.$$

Twierdzenie 6. x jest punktem skupienia zbioru $A \iff A$ zawiera ciąg (x_n) taki, że $x_n \neq x$ dla każdego n oraz $\lim_n x_n = x$.

Proof. $(\Rightarrow)$ Dla kolejnych n wybieramy x_n z przekrojów $A \cap \big(K(x, \frac{1}{n}) \setminus \{x\}\big)$.

$(\Leftarrow)$ Dla $\epsilon > 0$ znajdujemy n_0 z definicji zbieżności. Dla $n > n_0$ mamy $x_n \in K(x, \epsilon)$, a z własności tego ciągu $x_n \neq x$ i $x_n \in A$. □

Definicja 6. Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A nazywamy *pochodną* zbioru A i oznaczamy A^d.

Przykłady W naturalnych metrykach mamy:

1. $\mathbb{N}^d = \phi$
2. $\mathbb{Q}^d = \mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$

Ale jeśli rozpatrzymy w $\mathbb{N} \cup \{0\}$ metrykę ρ, to pochodną będzie $\{0\}$. Fakt bycia punktem skupienia i pochodna zależą od przyjętej metryki!!!