Elementy analizy matematycznej 2 (USPO)

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

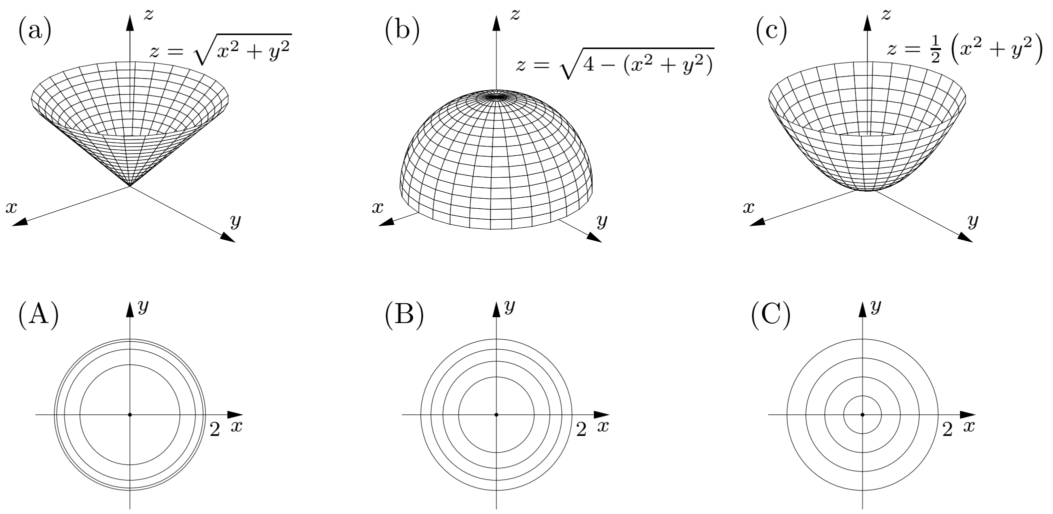
Ćwiczenia 1

1.1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y) = \ln(y - \sin x)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2 - y}}$;

(d) $f(x,y) = \ln \dfrac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$; (e) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{2-y}$; (f) $f(x,y) = \arccos\left(x^2+y^2\right)$.

1.2. Wykresy (a), (b), (c) połączyć z odpowiadającymi im poziomicami (A), (B), (C) wykonanymi dla $h = 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0$:



1.3. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x,y) = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y) = \sqrt{3-2x-x^2-y^2}$; (c) $f(x,y) = x^2+2x+y^2-6y+3$;

(d) $f(x,y) = \cos x$; (e) $f(x,y) = 1 - y^2$; (f*) $f(x,y) = \sqrt{y^2-x^2}$.

1.4. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe f'_x, f'_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x^6+y^4}$, $(0,0)$.

1.5. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y) = e^{\cos\frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)$; (f) $f(x,y) = \cos\left(x \sin\left(y \cos x\right)\right)$.

1.6*. Sprawdzić, że funkcja f spełnia podane równanie:

(a) $f(x,y) = \ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $xf'_x + yf'_y = 2$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, $xf'_x + yf'_y = \dfrac{f}{2}$.

Ćwiczenia 2

2.1. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $\quad (1, 3, z_0)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $\quad (2, -1, z_0)$; (c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$; $\quad \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$;

(d) $z = (2 + x - 3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz;

(e) $z = e^{x+y} - e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

2.2. (a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x + y - z = 5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, która jest prostopadła do prostej $x = y = \dfrac{z}{2}$.

2.3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$; (b) $2.97 \cdot e^{0.05}$; (c) $\dfrac{\cos 0.05}{1.96}$.

2.4. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostokąta mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostokąta d, jeżeli długości krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości stożka V, jeżeli pomiaru jego średnicy r i wysokości h dokonano z dokładnością odpowiednio δ_r, δ_h.

2.5. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.6. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 2$, $\quad (1, -2)$; (b) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$, $\quad (e, 1)$;

(c) $f(x,y) = (1 + xy)^y$, $\quad (0, 0)$; (d) $f(x,y) = x\sqrt{y} - e^x \ln y$, $\quad (0, 1)$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y + \sin x}$, $\quad \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$; (f) $f(x,y) = \sqrt{y + \sqrt{x}}$, $\quad (1, 1)$.

Ćwiczenia 3

3.1. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad (x_0, y_0) = (-3, 4)$, $\quad \boldsymbol{v} = \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$;

(b) $f(x,y) = x - \dfrac{y}{x^2} + y$, $\quad (x_0, y_0) = (1, 1)$, $\quad \boldsymbol{v} = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$;

(c) $f(x,y) = e^{x^2 y - x}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.2. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2, -1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

3.3. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji:

(a) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^3}{x}$; (b) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; (c) $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$;
(d) $f(x,y) = ye^{xy}$; (d) $f(x,y) = y \ln \dfrac{x}{y}$; (e) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

3.4*. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek (równanie Laplace'a) $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$:

(a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$; (b) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$; (c) $f(x,y) = \cos x \cosh y$.

3.5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$; (b) $f(x,y) = xe^{-y} + \dfrac{1}{x} + e^y$;
(c) $f(x,y) = xy^2(12 - x - y)$ $(x, y > 0)$; (d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;
(e) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$ $(x, y > 0)$; (f) $f(x,y) = xy + \ln y + x^2$;
(g) $f(x,y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$; (h) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$.

Ćwiczenia 4

4.1. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint\limits_R \left(x + xy - x^2 - 2y\right) dxdy$, $R = [0,1] \times [0,1]$; (b) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x\,dxdy}{y^2}$, $R = [1,2] \times [2,4]$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $R = [0,2] \times [0,1]$; (d) $\displaystyle\iint\limits_R (x \sin(xy))\,dxdy$, $R = [0,1] \times [\pi, 2\pi]$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_R e^{2x-y}\,dxdy$, $R = [0,1] \times [-1,0]$; (f) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{(x+y)\,dxdy}{e^x}$, $R = [0,1] \times [0,1]$.

4.2. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\,dy$; (b) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2\sqrt{y-x}\,dy$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3+y^3\right) dy$; (d) $\displaystyle\int_0^3 dy \int_0^y \sqrt{y^2+16}\,dx$.

Narysować obszary całkowania.

4.3. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{|x|} f(x,y)\,dy$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy$; (c) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$;

(d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\,dx$; (e*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$; (f) $\displaystyle\int_1^e dx \int_{\ln x}^{1} f(x,y)\,dy$.

4.4. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $\quad D:\ y = x, \quad y = 2 - x^2;$

(b) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, $\quad D:\ y = -2, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad y = -\sqrt{-x};$

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, $\quad D:\ y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 1/2, \quad y = 1;$

(d) $\iint\limits_D \left(xy + 4x^2\right)\,dxdy$, $\quad D:\ y = x + 3, \quad y = x^2 + 3x + 3;$

(e) $\iint\limits_D x^2e^{xy}\,dxdy$, $\quad D:\ y = x, \quad y = 1, \quad x = 0;$

(f) $\iint\limits_D \dfrac{x\,dxdy}{x^2 + y^2}$, $\quad D:\ x = 1, \quad x = 2, \quad y = x, \quad y = x\sqrt{3};$

(g) $\iint\limits_D e^{x^2}\,dxdy$, $\quad D:\ y = 0, \quad y = 2x, \quad x = \sqrt{\ln 3};$

(h) $\iint\limits_D (2x - 3y + 2)\,dxdy$, $\quad D:\ y = 0, \quad y = \pi, \quad x = -1, \quad x = \sin y.$

Ćwiczenia 5

5.1. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $\quad D:\ x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad \dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

(b) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $\quad D:\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2, \quad x \geqslant 0;$

(c) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy$, $\quad D:\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1;$

(d) $\iint\limits_D \sin\left(x^2 + y^2\right)\,dxdy$, $\quad D:\ x^2 + y^2 \leqslant \pi^2;$

(e) $\iint\limits_D \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)\,dxdy$, $\quad D:\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9;$

(f) $\iint\limits_D x^2\,dxdy$, $\quad D:\ x^2 + y^2 \leqslant 2y;$

(g) $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\,dxdy$, $\quad D:\ y \geqslant 0, \quad y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x;$

(h) $\iint\limits_D y\,dxdy$, $\quad D:\ x^2 + y^2 \leqslant 2x\ (y \leqslant 0).$

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

5.2. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$; (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$;
(c) $x + y = 4$, $x + y = 8$, $x - 3y = 0$, $x - 3y = 5$; (d) $x^2 + y^2 = 2y$, $y = \sqrt{3}|x|$.

5.3. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:
(a) $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, $z = x^2 + y^2 - 13$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$ $(z \geqslant 1)$;
(c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$; (d) $z = 5 - x^2 - y^2$, $z = 1, z = 4$;
(e*) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $z = xy$, $z = 0$; (f*) $2z = x^2 + y^2$, $y + z = 4$.

5.4. Obliczyć pola płatów:
(a) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0$, $z \geqslant 0$ $(R > 0)$;
(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 2$;
(d) część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z = \left(x^2 + y^2\right)/2$.

Ćwiczenia 6

6.1. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n - 1}{n!}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}}$.

6.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 1}{n^3 + 2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + 2}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + e^n}{e^n + 4^n}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n3^n + 2^n}$.

6.3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{\sqrt{2n^6 - 1}}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 1}{3^n - 1}$;
(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^n \left(1 + 3^{-n}\right)$; (e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n^2}}{\sin \frac{\pi}{n}}$; (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n + 2)!}$.

6.4. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2024^n}{(2n)!}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 1}{n^4 + 1}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6.5. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 1)^{2n}}{(3n^2 + 1)^n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 5^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n + 1)^{n^2}}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{n}{n + 1}\right)^n$.

Ćwiczenia 7

7.1. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n + 4^n}$; (c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \sin \frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$.

7.2. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + 1}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 2}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n + 5}\right)^n$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{e} - 1\right)$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$.

7.3. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (4x-12)^n$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}$.

7.4. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\frac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\frac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\frac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

7.5. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0),\ f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(20)}(0),\ f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0),\ f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0),\ f(x)=x\sin^2\frac{x}{2}$.

7.6. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x)=xe^{-x^2}$; (c) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

7.7. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x\in(-1,1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=-\ln(1-x)$.

Źródła zadań

[1] M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory, Wrocław 2023.

[2] M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Wrocław 2023.

[3] M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy, Wrocław 2023.

[4] Z.Skoczylas, Studencki konkurs matematyczny, Wrocław 2020.