# Analiza Matematyczna 2.2A (MAT1424) dla W12
# Analiza Matematyczna 2.2B (MAT1426) dla W3
## Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek – ćwiczeń o numerach od 1 do 14. Piętnaste ćwiczenia przeznaczono na kolokwium. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca oraz w książce [5].

---

## Ćwiczenia 1

**1.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-x}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty x\cos x\,dx$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{-x}+1}}$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+25}$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{2x}\,dx$.

**2.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1}$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\left(2^x+1\right)\,dx}{3^x+1}$; (e) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3}$; (f) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(3+\cos x)\,dx}{\sqrt{x}+2}$.

**3.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x\,(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (c) $\displaystyle\int_2^\infty \left(e^{1/x}-1\right)dx$; (d) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$.

**4.** (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y=\dfrac{1}{x^2+9}$ oraz osią $Ox$.

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi $Ox$ obszaru $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant e^{-x}\right\}$.

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x\geqslant 1)$ wokół osi $Ox$ ma skończoną wartość.

**5.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x\,dx}{x}$; (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sin x}$; (d) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2^x\,dx}{\sqrt{2^x-8}}$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}$.

**6.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x\,dx}{x^3}$; (c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$; (d*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

**7.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)\,dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^3 x\,dx}{x^4}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^x-1)\,dx}{\sqrt{x^3}}$; (d*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$; (e*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$.

## Ćwiczenia 2

**8.** Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

**9.** Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

**10.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

**11.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^n\ln\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi/n^2\right)}{\sin\left(\pi/n\right)}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!}$.

**12.** Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

**13.** Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

## Ćwiczenia 3

**14.** Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2016}}{3^n}=0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$; (d*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!}=0$.

**15.** Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

**16.** Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

**17.** Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4x-12)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}$.

# Ćwiczenia 4

**18.** Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\dfrac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\dfrac{x}{2}$; (c) $x^2e^{-x}$; (d) $\dfrac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

**19.** Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0)$, $f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(20)}(0)$, $f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0)$, $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0)$, $f(x)=x\sin^2\dfrac{x}{2}$.

**20.** Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x)=xe^{-x^2}$; (c) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

**21.** Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x\in(-1,1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

**22.** Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

# Ćwiczenia 5

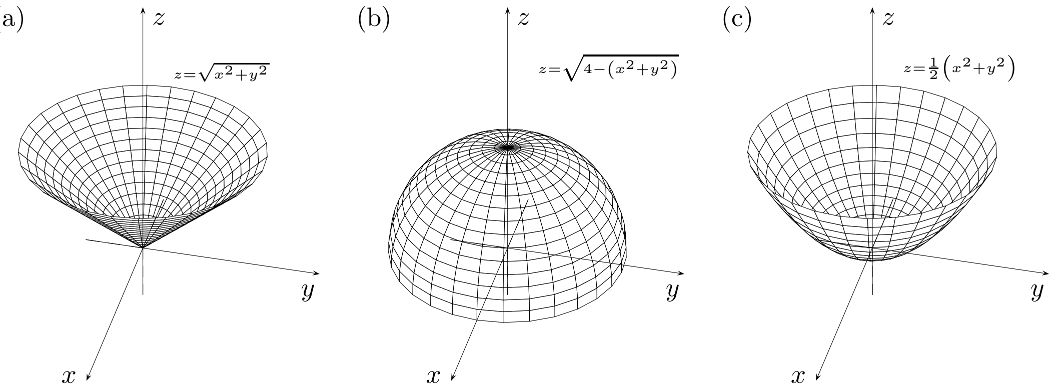
**23.** Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y)=\ln(y-\sin x)$; (b) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2-y}}$; (d) $f(x,y)=\ln\dfrac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$;

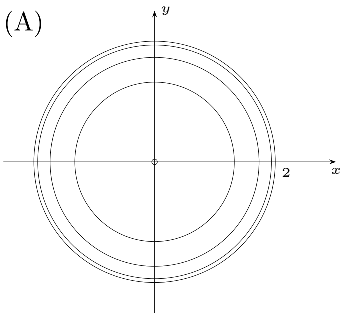
(e) $g(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{2-z}$; (f) $g(x,y,z)=\arccos\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$.

**24.** Wykresy (rys. (a)–(c)) połączyć z odpowiadającymi im poziomicami (rys. (A)–(C)) wykonanymi dla $h=2,\ 3/2,\ 1,\ 1/2,\ 0$:

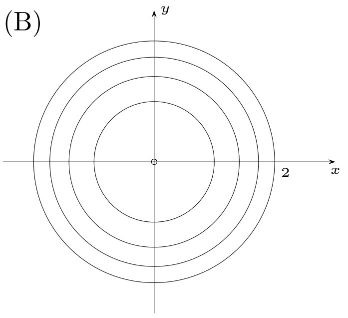
(a) (b) (c)



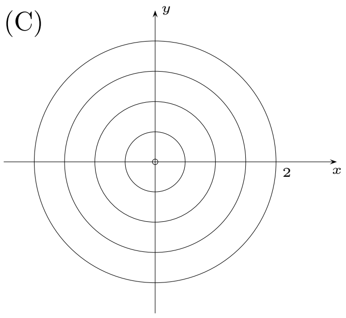
(A)




(B)




(C)




**25.** Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x,y) = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y) = \sqrt{3+2x-x^2-y^2}$; (c) $f(x,y) = x^2+2x+y^2-6y+3$;

(d) $f(x,y) = \cos x$; (e) $f(x,y) = 1 - y^2$; (f*) $f(x,y) = \sqrt{y^2-x^2}$.

*** 26.** Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2\cos\dfrac{1}{x^4+y^4}$.

**27.** Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $f_x$, $f_y$ funkcji $f$ we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x^6+y^4}$, $(0,0)$.

**28.** Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f$ i $g$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y) = e^{\cos\frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$; (f) $g(x,y,z) = x^2 + \dfrac{xz}{y} + yz^3$;

(g) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; (h) $g(x,y,z) = \cos(x\sin(y\cos z))$; (i) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+\sqrt{y^2+\sqrt{z^2+1}}}$.

## Ćwiczenia 6

**29.** Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $(1,3,z_0)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $(2,-1,z_0)$; (c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$;

(d) $z = (2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi $Oz$; (e) $z = e^{x+y} - e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi $Ox$.

**30.** (a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=t$, $y=t$, $z=2t$, $t\in\mathbb{R}$.

**31.** Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $(1.02)^3\cdot(0.997)^2$; (b) $\sqrt[3]{(3.03)^3+(4.04)^3+(5.05)^3}$; (c) $2.97\cdot e^{0.05}$; (d) $\dfrac{\cos 0.05}{1.96}$.

**32.** (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość $V$ tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu $d$, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny $\delta_V$ objętości prostopadłościamu $V$, jeżeli pomiaru jego boków $x$, $y$, $z$ dokonano z dokładnością odpowiednio $\Delta_x$, $\Delta_y$, $\Delta_z$.

*** 33.** Sprawdzić, że podane funkcje spełniają wskazane równania:

(a) $z = f\left(x^2+y^2\right), \quad yz_x - xz_y = 0$; (b) $z = xf\left(\sin(x-y)\right), \quad z_x + z_y = \dfrac{z}{x}$;

(c) $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad xz_x + yz_y = nz \ (n \in \mathbb{N})$; (d*) $z = \dfrac{x}{y} g(x) + h\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + xz_x + 2yz_y = 0$.

**34.** Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \ (x_0,y_0) = (0,0), \ \boldsymbol{v} = \left(\sqrt{3}/2, \ 1/2\right)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, \ (x_0,y_0) = (1,0), \ \boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2, \ \sqrt{2}/2\right)$.

**35.** Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 2, \ (1,-2)$; (b) $f(x,y) = \ln(x + \ln y), \ (e,1)$; (c) $f(x,y) = (1+xy)^y, \ (0,0)$;

(d) $g(x,y,z) = x\sqrt{y} - e^z \ln y, \ (0,1,0)$; (e) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{y + \sin z}, \ (0,1,\pi)$; (f) $g(x,y,z) = \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{z}}}, \ (1,1,1)$.

**36.** Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \ (x_0,y_0) = (-3,4), \ \boldsymbol{v} = (12/13, \ 5/13)$;

(b) $f(x,y) = x - \dfrac{y}{x^2} + y, \ (x_0,y_0) = (1,1), \ \boldsymbol{v} = (3/5, \ -4/5)$;

(c) $g(x,y,z) = e^{x^2 y - z}, \ (x_0,y_0,z_0) = (-1,1,-1), \ \boldsymbol{v} = (2/3, -2/3, 1/3)$.

**37.** (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2, \ -1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt $\alpha$ z dodatnią częścią osi $Ox$. Dla jakiego kąta $\alpha$ pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

## Ćwiczenia 7

**38.** Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funcji $f$ i $g$:

(a) $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f(x,y) = ye^{xy}$; (c) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^3}{x}$;

(d) $f(x,y) = y \ln \dfrac{x}{y}$; (e) $g(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$; (f) $g(x,y,z) = \ln\left(x + y^2 + z^3 + 1\right)$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

**39.** Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$; (b) $f(x,y) = xe^{-y} + \dfrac{1}{x} + e^y$; (c) $f(x,y) = xy^2(12 - x - y) \ (x,y > 0)$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; (e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$; (f) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y \ (x,y>0)$;

(g) $f(x,y) = xy + \ln y + x^2$; (h) $f(x,y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$; (i) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$.

**40.** Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \ 3x + 2y = 6$; (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 10, \ x - y^2 + 1 = 0$;

(c) $f(x,y) = x^2 y + \ln x, \ 8x + 3y = 0$; (d) $f(x,y) = 2x + 3y, \ x^2 + y^2 = 1$.

## Ćwiczenia 8

**41.** Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy,\ \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2}$; (c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$;

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2,\ \ D$ – trójkąt o wierzchołkach $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$;

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4,\ \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$;

(f*) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-2y},\ \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

**42.** (a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1,5)$, $B = (1,4)$, $C = (2,-3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

(b) Jakie powinny być długość $a$, szerokość $b$ i wysokość $h$ prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności $V$, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

(c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x + y - 1 &= 0, \\ z + 1 &= 0, \end{cases} \qquad l: \begin{cases} x - y + 3 &= 0, \\ z - 2 &= 0. \end{cases}$$

(d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\text{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\text{zł/m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\text{zł/m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\text{zł/m}^2$. Znaleźć długość $a$, szerokość $b$ i wysokość $c$ magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

(f) Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania $x$ sztuk drzwi wewnętrznych i $y$ zewnetrznych wynosi

$$K(x,y) = x^2 - xy + y^2 \ [\text{zł}].$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

(g) Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P = (4,1)$ jest najmniejsza.

## Ćwiczenia 9

**43.** Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\iint\limits_R \left(x + xy - x^2 - 2y\right) dxdy,\ R = [0,1] \times [0,1]$; (b) $\iint\limits_R \frac{x\,dxdy}{y^2},\ R = [1,2] \times [2,4]$;

(c) $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3},\ R = [0,2] \times [0,1]$; (d) $\iint\limits_R (x\sin(xy))\,dxdy,\ R = [0,1] \times [\pi, 2\pi]$;

(e) $\iint\limits_R e^{2x-y}\,dxdy,\ R = [0,1] \times [-1,0]$; (f) $\iint\limits_R \frac{(x+y)\,dxdy}{e^x},\ R = [0,1] \times [0,1]$.

**44.** Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar $D$ ograniczony jest krzywymi:

(a) $y = x^2,\ \ y = x + 2$; (b) $x^2 + y^2 = 4,\ \ y = 2x - x^2,\ \ x = 0\ (x, y \geqslant 0)$;

(c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$; (d) $x^2 - y^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = 3\ (x < 0)$.

**45.** Obliczyć całki iterowane:

(a) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\,dy$; (b) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_x^{2x} x^2\sqrt{y - x}\,dy$; (c) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3 + y^3\right) dy$; (d) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y \sqrt{y^2 + 16}\,dx$.

Narysować obszary całkowania.

**46.** Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-1}^{|x|} f(x,y)\,dy$; (b) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x,y)\,dy$; (c) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$;

(d) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\,dx$; (e*) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$; (f) $\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy$.

**47.** Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D:\ y=x,\ y=2-x^2;$

(b) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy,\ D:\ y=-2,\ y=\frac{1}{x},\ y=-\sqrt{-x};$

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy,\ D:\ y=\sqrt{x},\ x=0,\ y=1/2,\ y=1;$

(d) $\iint\limits_D \left(xy+4x^2\right)\,dxdy,\ D:\ y=x+3,\ y=x^2+3x+3;$

(e) $\iint\limits_D x^2e^{xy}\,dxdy,\ D:\ y=x,\ y=1,\ x=0;$

(f) $\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2},\ D:\ x=1,\ x=2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3}.$

## Ćwiczenia 10

**48.** Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ \frac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x;$

(b) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2;$

(c) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1;$

(d) $\iint\limits_D x^2\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2y;$

(e) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x;$

(f) $\iint\limits_D y\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2x\ (y\leqslant 0);$

(g) $\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant\pi^2;$

(h) $\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9.$

Obszar $D$ naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

**49.** Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2=4x,\ \ x+y=3,\ \ y=0\ (y\geqslant 0);$

(b) $x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-4y=0;$

(c) $x+y=4,\ \ x+y=8,\ \ x-3y=0,\ \ x-3y=5;$

(d) $x^2+y^2=2y,\ \ y=\sqrt{3}|x|.$

**50.** Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z=\sqrt{25-(x^2+y^2)},\ z=x^2+y^2-13;$

(b) $x^2+y^2+z^2=4,\ \ z=1\ (z\geqslant 1);$

(c) $x^2+y^2-2y=0,\ \ z=x^2+y^2,\ \ z=0;$

(d) $z=5-x^2-y^2,\ \ z=1,\ \ z=4;$

(e*) $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ \ z=xy,\ \ z=0;$

(f*) $2z=x^2+y^2,\ \ y+z=4.$

**51.** Obliczyć pola płatów:

(a) $z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2\leqslant 1;$ (b) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ \ x^2+y^2-Rx\leqslant 0,\ \ z\geqslant 0;$ (c) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ 1\leqslant z\leqslant 2;$

(d) część sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z=\left(x^2+y^2\right)/2.$

## Ćwiczenia 11

**52.** Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

(a) $\iiint\limits_U \frac{x\,dxdydz}{yz},\ U=[1,2]\times[1,e]\times[1,e];$

(b) $\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz,\ U=[1,2]\times[2,3]\times[3,4];$

(c) $\iiint\limits_U \sin x\sin(x+y)\sin(x+y+z)\,dxdydz,\ U=[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi];$

(d) $\iiint\limits_U (x+y)e^{x+z}\,dxdydz,\ U=[0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

**53.** Całkę potrójną z funkcji $g(x, y, z)$ po obszarze $U$ zamienić na całki iterowane, jeżeli $U$ jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

(a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6$; (b) $x^2+y^2+z^2 = 25$, $z = 4$, $(z \geqslant 4)$; (c) $z = x^2+y^2$, $z = \sqrt{20-x^2-y^2}$.

*** 54.** Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania:

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)\, dz$; (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz$;

(c) $\displaystyle\int_0^3 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\, dy$; (d) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)\, dz$.

**55.** Obliczyć całki potrójne z podanych funkcji po wskazanych obszarach:

(a) $g(x,y,z) = e^{x+y+z}$, $U : x \leqslant 0, -x \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant -x$;

(b) $g(x,y,z) = \dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, $U : x \geqslant 0, y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$;

(c) $g(x,y,z) = x^2+y^2$, $U : x^2+y^2 \leqslant 4, 1-x \leqslant z \leqslant 2-x$;

(d) $g(x,y,z) = x^2y^2$, $U : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$.

**56.** Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\displaystyle\iiint_U \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dxdydz$, $U : x^2+y^2 \leqslant 4, 0 \leqslant z \leqslant 1$;

(b) $\displaystyle\iiint_U xyz\, dxdydz$, $U : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(c) $\displaystyle\iiint_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, $U : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$;

(d) $\displaystyle\iiint_U (x+y+z)\, dxdydz$, $U : x^2+y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2-x-y$.

---

# Ćwiczenia 12

---

**57.** Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\displaystyle\iiint_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $U : 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;

(b) $\displaystyle\iiint_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, $U : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(c) $\displaystyle\iiint_U z^2\, dxdydz$, $U : x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2$ $(R > 0)$; (d) $\displaystyle\iiint_U x^2\, dxdydz$; $U : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x$.

**58.** Obliczyć objętości obszarów $U$ ograniczonych podanymi powierzchniami:

(a) $x^2+y^2 = 9$, $x+y+z = 1$, $x+y+z = 5$; (b) $z = 4-x^2$, $z = y^2-5$;

(c) $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$, $z = 0$, $x^2+y^2 = 4$; (d) $x^2+y^2+z^2 = 2$, $y = 1$ $(y \geqslant 1)$.

**59.** Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 9\right\}$; (b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\right\}$;

(c) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant e^x\right\}$; (d) $D$ — trójkąt równoramienny o podstawie $a$ i wysokości $h$;

(e) $D$ — trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu $a$;

(f) $D$ — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

**60.** Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie $M$, względem wskazanych osi lub punktów:

(a) trójkąt równoboczny o boku $a$, podstawa; (b) odcinek paraboli o szerokości $a$ i wysokości $h$, oś symetrii;

(c) kwadrat o boku $a$, przekątna; (a) ćwiartka koła o promieniu $R$, oś symetrii;

(e) koło o średnicy $D$, środek; (f) elipsa o półosiach $a$, $b$, oś symetrii.

**61.** Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

(a) półkula o promieniu $R$; (b) stożek o promieniu podstawy $R$ i wysokości $H$; (c) $U: \ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}$.

**62.** Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie $M$, względem wskazanych osi:

(a) walec o promieniu podstawy $R$ i wysokości $H$, oś walca;

(b) stożek o promieniu podstawy $R$ i wysokości $H$, oś stożka;

(c) kula o promieniu $R$, oś symetrii;

(d) odcinek paraboloidy o średnicy $D$ i wysokości $H$, oś obrotu.

## Ćwiczenia 13

**63.** (a) Z pewnej substancji radioaktywnej po upływie 4 lat zostało 20 gram, a po upływie dalszych 4 lat tylko 4 gramy. Wyznaczyć masę substancji w chwili początkowej.

(b) Polon-210 ma okres połowicznego zaniku równy 140 dni. Znaleźć masę tego pierwiastka po 100 dniach, jeżeli jego masa początkowa wynosiła 200 g.

(c) Okres połowicznego zaniku pewnego pierwiastka promieniotwórczego jest równy 100 lat. Ile procent masy początkowej tego pierwiastka pozostanie po i) 10, ii) 50, iii) 200 latach?

**64.** Scałkować równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

(a) $yy'+4t=0$; (b) $dy=2ty^2dt$; (c) $t\left(y^2-1\right)dt+y\left(t^2-1\right)dy=0$;

(d) $2\sqrt{t}y'=\sqrt{1-y^2}$; (e) $y'=1+t+y+ty$; (f) $y'+4y=y\left(e^{-t}+4\right)$.

**65.** Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:

(a) $y'\sin t=y\ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$; (b) $t\sqrt{1-y^2}dt+y\sqrt{1-t^2}dy=0, \quad y(0)=1$;

(c) $t(y+1)y'=y, \quad y(e)=1$; (d) $y\cos t dt-\left(1+y^2\right)dy=0, \quad y(0)=1$;

(e) $y'=y^2\left(1+t^2\right), \quad y(0)=-2$; (f) $e^y\left(y'-1\right)=1, \quad y(0)=0$.

**66.** Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

(a) $y'+y=\sin t$; (b) $y'+2ty=e^{-t^2}$; (c) $ty'-2y=t^3\cos t$;

(d) $ty'-2y=4t^4$; (e) $ty+e^t-ty'=0$; (f) $(2t+1)y'=4t+2y$.

**67.** Wyznaczyć rozwiązania zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych:

(a) $y'-y=1, \ y(3)=3$; (b) $y'=(y+1)\sin t, \ y\left(t_0\right)=y_0$;

(c) $ty'+y=t+1, \ y(1)=0$; (d) $y'\sin t\cos t=y+\sin^3 t, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

## Ćwiczenia 14

**68.** Napisać równania charakterystyczne liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach:

(a) $y''-2y'+y=0$; (b) $y''-3y=0$; (c) $4y''+y'=0$;

(d) $2y''-3y'+4y=0$; (e) $y''=2y$; (f) $y''=4y'^6-2y$.

**69.** Rozwiązać równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach:

(a) $6y'' - 5y' + y = 0$; (b) $y'' - y' - 2y = 0$; (c) $4y'' - 4y + y = 0$;

(d) $y'' + y' + \dfrac{y}{4} = 0$; (e) $y'' - 4y' + 5y = 0$; (f) $y'' - 2y' + 5y = 0$;

(g) $y'' + 6y' + 18y = 0$; (h) $7y'' + 4y' - 3y = 0$; (i) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

**70.** Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

(a) $y'' + y' - 6y = 0,\ \ y(0) = 1, y'(0) = 0$; (b) $y'' + 9y = 0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1, y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$;

(c) $y'' - 2y' + y = 0,\ \ y(1) = 2, y'(1) = 3$; (d) $y'' - 7y' + 12y = 0,\ \ y(0) = 3, y'(0) = -2$.

**71.** Korzystając z metody uzmienniania stałych rozwiązać liniowe, niejednorodne równania różniczkowe:

(a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$; (b) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2t}$; (c) $y'' - y = \dfrac{4t^2 + 1}{t\sqrt{t}}$;

(d) $y'' - 2y' \operatorname{tg} t = 1$; (e) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^t}$; (f) $y'' + 3y' + 2y = \cos\left(e^t\right)$.

**72.** Metodą operatorową rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

(a) $y' - y = 1,\quad y(0) = 1$; (b) $y' - 2y = \sin t,\quad y(0) = 0$;

(c) $y'' + y' = 0,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$; (d) $y'' + 3y' = e^{-3t},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1$;

(e) $y'' - 2y' + 2y = \sin t,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$; (f) $y'' - 2y' + y = 1 + t,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

(g) $y'' + 4y' + 4y = t^2,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$; (h) $y'' + 4y' + 13y = te^{-t},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

## Ćwiczenia 15 – kolokwium

## Źródła zadań


**[1]** M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2019.

**[2]** M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2019.

**[3]** M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2018.

**[4]** M.Gewert, Z.Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Wrocław 2016.

**[5]** Z.Skoczylas, *Studencki konkurs matematyczny*, Wrocław 2020.