Analiza Matematyczna II (MAT1687) dla W8
Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek – ćwiczeń o numerach od 1 do 14. Piętnaste ćwiczenia przeznaczono na kolokwium. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca oraz w książce [5].

Ćwiczenia 1

1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-x}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty x\cos x\,dx$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{-x}+1}}$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+25}$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{2x}\,dx$.

2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1}$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(2^x+1)\,dx}{3^x+1}$; (e) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3}$; (f) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(3+\cos x)\,dx}{\sqrt{x}+2}$.

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x\,(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (c) $\displaystyle\int_2^\infty \left(e^{1/x}-1\right)dx$; (d) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$.

4. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y=\dfrac{1}{x^2+9}$ oraz osią Ox.

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant e^{-x}\right\}$.

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x\geqslant 1)$ wokół osi Ox ma skończoną wartość.

5. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x\,dx}{x}$; (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sin x}$; (d) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2^x\,dx}{\sqrt{2^x-8}}$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}$.

6. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x\,dx}{x^3}$; (c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$; (d*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

7. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)\,dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^3 x\,dx}{x^4}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^x-1)\,dx}{\sqrt{x^3}}$; (d*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$; (e*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$.

8. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3\cos x\,dx}{x^2+4}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x+5|}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-4}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

Ćwiczenia 2

9. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

10. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

11. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

12. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^n\ln\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi/n^2\right)}{\sin\left(\pi/n\right)}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!}$.

13. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

14. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

15. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

16. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

Ćwiczenia 3

17. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4x-12)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}$.

18. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\dfrac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\dfrac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\dfrac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

19. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0)$, $f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(20)}(0)$, $f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0)$, $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0)$, $f(x)=x\sin^2\dfrac{x}{2}$.

20. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x)=xe^{-x^2}$; (c) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

21. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x \in (-1, 1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

22. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

Ćwiczenia 4

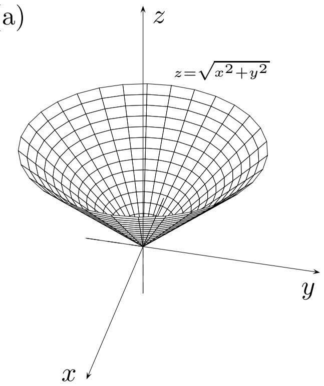
23. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y) = \ln(y - \sin x)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2 - y}}$; (d) $f(x,y) = \ln \dfrac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$;

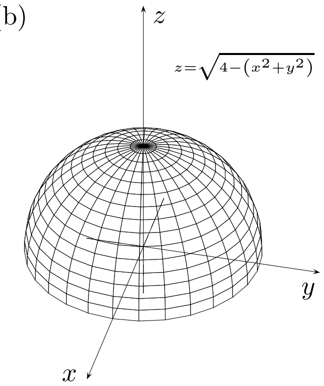
(e) $g(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{2-z}$; (f) $g(x,y,z) = \arccos\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$.

24. Wykresy (rys. (a)–(c)) połączyć z odpowiadającymi im poziomicami (rys. (A)–(C)) wykonanymi dla $h = 2, 3/2, 1, 1/2, 0$:

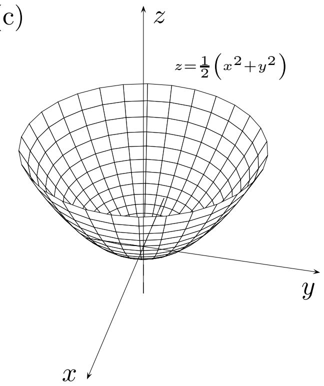
(a)



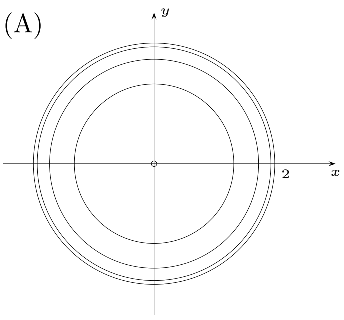
(b)



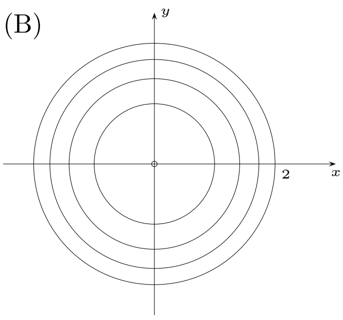
(c)



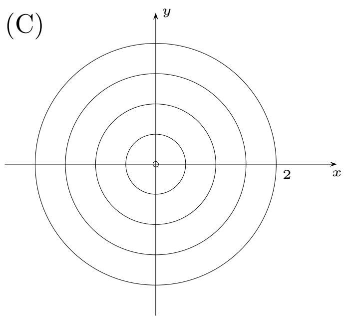
(A)



(B)



(C)



25. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x,y) = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y) = \sqrt{3+2x-x^2-y^2}$; (c) $f(x,y) = x^2+2x+y^2-6y+3$;

(d) $f(x,y) = \cos x$; (e) $f(x,y) = 1 - y^2$; (f*) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$.

*** 26.** Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cos \dfrac{1}{x^4+y^4}$.

Ćwiczenia 5

27. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x^6 + y^4}$, $(0,0)$.

28. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f i g:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y) = e^{\cos \frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)$; (f) $g(x,y,z) = x^2 + \dfrac{xz}{y} + yz^3$;

(g) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; (h) $g(x,y,z) = \cos(x\sin(y\cos z))$; (i) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + \sqrt{y^2 + \sqrt{z^2+1}}}$.

29. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funcji f i g:

(a) $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f(x,y) = ye^{xy}$; (c) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^3}{x}$;

(d) $f(x,y) = y \ln \dfrac{x}{y}$; (e) $g(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$; (f) $g(x,y,z) = \ln\left(x+y^2+z^3+1\right)$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

30. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (równanie Laplace'a):

(a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$; (b) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$; (c) $f(x,y) = \cos x \cosh y$.

31. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe funkcji:

(a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, $f(x,y) = \sin xy$; (b) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x \partial y}$, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$;

(c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^3}{z}$; (d) $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}$, $f(x,y,z) = e^{xy+z}$.

32. Sprawdzić, że funkcje:

(a) $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$; (b)$z = x + \sqrt{\dfrac{x}{y}}$; (c)$z = x + \ln\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$; (d)$z = x + \sqrt{xy}$

spełniają równanie

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{gdzie } x,\ y > 0.$$

Ćwiczenia 6

33. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $(1,3,z_0)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $(2,-1,z_0)$; (c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$;

(d) $z = (2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz; (e) $z = e^{x+y} - e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

34. (a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=t$, $y=t$, $z=2t$, $t \in \mathbb{R}$.

35. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:
(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{3}/2,\ 1/2\right)$;
(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$.

36. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:
(a) $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 2$, $(1, -2)$; (b) $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$, $(e, 1)$; (c) $f(x, y) = (1 + xy)^y$, $(0, 0)$;

(d) $g(x, y, z) = x\sqrt{y} - e^z \ln y$, $(0, 1, 0)$; (e) $g(x, y, z) = \dfrac{x}{y + \sin z}$, $(0, 1, \pi)$; (f) $g(x, y, z) = \sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{z}}}$, $(1, 1, 1)$.

37. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (-3, 4)$, $\boldsymbol{v} = (12/13,\ 5/13)$;
(b) $f(x, y) = x - \dfrac{y}{x^2} + y$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (3/5,\ -4/5)$;
(c) $g(x, y, z) = e^{x^2 y - z}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$, $\boldsymbol{v} = (2/3, -2/3, 1/3)$.

38. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2,\ -1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?
(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x, y) = \sqrt{e^x}\left(x + y^2\right)$ w punkcie $(0, 2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

Ćwiczenia 7

39. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:
(a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$; (b) $f(x, y) = xe^{-y} + \dfrac{1}{x} + e^y$; (c) $f(x, y) = xy^2(12 - x - y)$ $(x, y > 0)$;
(d) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; (e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$; (f) $f(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$ $(x, y > 0)$;
(g) $f(x, y) = xy + \ln y + x^2$; (h) $f(x, y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$; (i) $f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$.

40. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $3x + 2y = 6$; (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 10$, $x - y^2 + 1 = 0$;
(c) $f(x, y) = x^2 y + \ln x$, $8x + 3y = 0$; (d) $f(x, y) = 2x + 3y$, $x^2 + y^2 = 1$.

Ćwiczenia 8

41. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:
(a) $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\}$;
(b) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2}$; (c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$;
(d) $f(x, y) = x^2 - y^2$, D – trójkąt o wierzchołkach $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$;
(e) $f(x, y) = x^4 + y^4$, $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\right\}$;
(f*) $f(x, y) = (x + y)e^{-x-2y}$, $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}$.

42. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

43. Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

44. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x+y-1 &= 0, \\ z+1 &= 0, \end{cases} \qquad l: \begin{cases} x-y+3 &= 0, \\ z-2 &= 0. \end{cases}$$

45. Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

46. Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y zewnetrznych wynosi

$$K(x,y) = x^2 - xy + y^2 \text{ [zł]}.$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

47. Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P = (4,1)$ jest najmniejsza.

Ćwiczenia 9

48. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\iint\limits_R \left(x + xy - x^2 - 2y\right)\,dxdy$, $R = [0,1]\times[0,1]$; (b) $\iint\limits_R \frac{x\,dxdy}{y^2}$, $R = [1,2]\times[2,4]$;

(c) $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $R = [0,2]\times[0,1]$; (d) $\iint\limits_R (x\sin(xy))\,dxdy$, $R = [0,1]\times[\pi,2\pi]$;

(e) $\iint\limits_R e^{2x-y}\,dxdy$, $R = [0,1]\times[-1,0]$; (f) $\iint\limits_R \frac{(x+y)\,dxdy}{e^x}$, $R = [0,1]\times[0,1]$.

49. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi:

(a) $y = x^2$, $y = x+2$; (b) $x^2+y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ $(x, y \geqslant 0)$;

(c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$; (d) $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3$ $(x < 0)$.

50. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\,dy$; (b) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_x^{2x} x^2\sqrt{y-x}\,dy$; (c) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3+y^3\right)\,dy$; (d) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y \sqrt{y^2+16}\,dx$.

Narysować obszary całkowania.

51. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $D:\ y = x,\ y = 2 - x^2$; (b) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, $D:\ y = -2,\ y = \frac{1}{x},\ y = -\sqrt{-x}$;

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, $D:\ y = \sqrt{x},\ x = 0,\ y = 1/2,\ y = 1$; (d) $\iint\limits_D \left(xy + 4x^2\right)\,dxdy$, $D:\ y = x+3,\ y = x^2 + 3x + 3$;

(e) $\iint\limits_D x^2e^{xy}\,dxdy$, $D:\ y = x,\ y = 1,\ x = 0$; (f) $\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}$, $D:\ x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = x\sqrt{3}sub.\ D:\ x = 1,\ x =$

Ćwiczenia 10

*** 52.** Stosując odpowiednią zamianę zmiennych obliczyć podane całki podwójne po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{(x-y)^3}\,dxdy$, gdzie $D:\ x+y=-1, x+y=1, x-y=1, x-y=3$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{y}$, gdzie $D:\ y=x,\ y=2x,\ y=-\frac{1}{2}x+1,\ y=-2x+4$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dxdy$, gdzie $D:\ xy=1,\ xy=2,\ y=x^2,\ y=3x^3$;

(d*) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^4-y^4\right)\,dxdy$, gdzie $D:\ x^2+y^2=3,\ x^2+y^2=5,\ x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=\ 2\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

53. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ \frac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1$;

(d) $\displaystyle\iint\limits_D x^2\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2y$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x$;

(f) $\displaystyle\iint\limits_D y\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2x\ (y\leqslant 0)$;

(g) $\displaystyle\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant\pi^2$;

(h) $\displaystyle\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$.

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

54. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2=4x,\ \ x+y=3,\ \ y=0\ (y\geqslant 0)$;

(b) $x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-4y=0$;

(c) $x+y=4,\ \ x+y=8,\ \ x-3y=0,\ \ x-3y=5$;

(d) $x^2+y^2=2y,\ \ y=\sqrt{3}|x|$.

Ćwiczenia 11

55. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z=\sqrt{25-(x^2+y^2)},\ z=x^2+y^2-13$;

(b) $x^2+y^2+z^2=4,\ z=1\ (z\geqslant 1)$;

(c) $x^2+y^2-2y=0,\ z=x^2+y^2,\ z=0$;

(d) $z=5-x^2-y^2,\ z=1,\ z=4$;

(e*) $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ z=xy,\ z=0$;

(f*) $2z=x^2+y^2,\ y+z=4$.

56. Obliczyć pola płatów:

(a) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\leqslant 1$; (b) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2-Rx\leqslant 0,\ z\geqslant 0$; (c) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\leqslant z\leqslant 2$;

(d) część sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z=\left(x^2+y^2\right)/2$.

57. Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

(a) $x^2+y^2=9,\quad x+y+z=1,\quad x+y+z=5$;

(b) $z=4-x^2,\quad z=y^2-5$;

(c) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2},\quad z=0,\quad x^2+y^2=4$;

(d) $x^2+y^2+z^2=2,\quad y=1\ (y\geqslant 1)$.

58. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\leqslant y\leqslant 9\right\}$;

(b) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\sin^2 x\right\}$;

(c) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ |y|\leqslant e^x\right\}$;

(d) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;

(e) D — trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a;

(f) D — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

59. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi lub punktów:

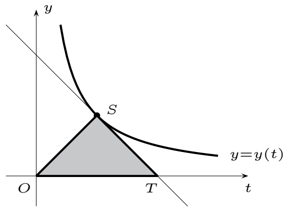
(a) trójkąt równoboczny o boku a, podstawa; (b) odcinek paraboli o szerokości a i wysokości h, oś symetrii;

(c) kwadrat o boku a, przekątna; (a) ćwiartka koła o promieniu R, oś symetrii;

(e) koło o średnicy D, środek; (f) elipsa o półosiach a, b, oś symetrii.

Ćwiczenia 12

*** 60.** Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt (1,1), dla której pole trójkąta OST (rysunek) utworzonego przez oś Ot, styczną i wektor wodzący punktu styczności jest stałe i równa się 1.



61. Sprawdzić, że podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych na zadanych przedziałach:

(a) $y(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, $ty' + y = \cos t$, $(0, \infty)$; (b) $y(t) = t^2$, $ty' + y = 3t^2$, $\mathbb{R}$;

(c) $y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $y' + 2ty^2 = 0$, $\mathbb{R}$; (d) $y(t) = -\sqrt{4-t^2}$, $yy' = -t$, $(-2, 2)$.

62. Sprawdzić, że dla każdego $C \in \mathbb{R}$ podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych, a następnie znaleźć rozwiązania spełniające zadane warunki początkowe:

(a) $y(t) = t + C$, $y' = 1$, $y(0) = 0$; (b) $y(t) = Ce^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^t$, $y' + 2y = e^t$, $y(0) = 1$;

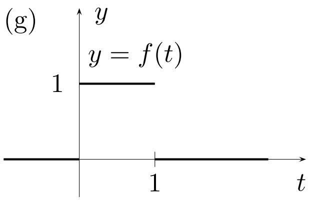
(c) $y(t) = Ce^t$, $y' = y$, $y(1) = -1$; (d) $y(t) = t + C\sqrt{t^2+1}$, $y' = \dfrac{ty+1}{t^2+1}$, $y(0) = 0$.

63. Korzystając z definicji obliczyć transformaty Laplace'a funkcji:

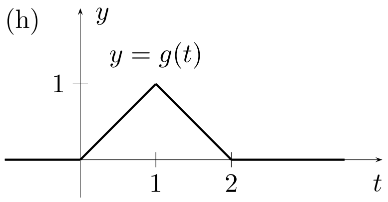
(a) $2t - 1$; (b) $\sin 2t$; (c) t^2;

(d) te^{-t}; (e) $e^{2t}\cos 2t$; (f) $\sinh t$;

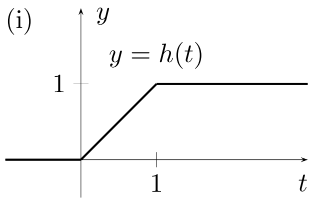
(g)



(h)



(i)



64. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

(a) $\dfrac{1}{s+2}$; (b) $\dfrac{s}{s^2+4s+5}$; (c) $\dfrac{1}{s^2-4s+3}$; (d) $\dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)\,(s^2+4)}$;

(e) $\dfrac{s^2+1}{s^2\,(s^2-1)^2}$; (f) $\dfrac{s+9}{s^2+6s+13}$; (g) $\dfrac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$; (h) $\dfrac{3s^2}{(s^3-1)^2}$; (i) $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$.

65. Metodą operatorową rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych

(a) $y' - y = 1$, $y(0) = 1$; (b) $y' - 2y = \sin t$, $y(0) = 0$;

(c) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$; (d) $y'' + 3y' = e^{-3t}$, $y(0) = 0, y'(0) = -1$;

(e) $y'' - 2y' + 2y = \sin t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$; (f) $y'' - 2y' + y = 1 + t$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;

(g) $y'' + 4y' + 4y = t^2$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$; (h) $y'' + 4y' + 13y = te^{-t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

66. Korzystając z definicji wyznaczyć transformaty Fouriera funkcji:

(a) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla} \quad |t| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \pi; \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla} \quad |t| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ (c) $f(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla} \quad |x| > 1; \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla} \quad |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > 1; \end{cases}$ (e) $f(t) = e^{-|t|}$; (f*) $f(t) = e^{-at^2}$, $a \neq 0$.

Wskazówka. (f*) Wykorzystać równość $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Ćwiczenia 13 – kolokwium

Źródła zadań

[1] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2019.

[2] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2019.

[3] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2018.

[4] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Wrocław 2016.

[5] Z.Skoczylas, *Studencki konkurs matematyczny*, Wrocław 2020.