Analiza Matematyczna II (MAT1645) dla W10

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 7 części odpowiadających kolejnym ćwiczeniom. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Na końcu listy zadań umieszczono przykładowe zestawy zadań z kolokwium, egzaminu podstawowego i poprawkowego, a także wykaz książek, z których są one zaczerpnięte.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca oraz w książce [4].

Ćwiczenia 1

---

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x^6 + y^4}$, $(0,0)$.

2. Obliczyć pochodne cząstkowe f_x, f_y funkcji f i pochodne cząstkowe g_x, g_y, g_z funkcji g:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1 - xy}{x + y}$; (c) $f(x,y) = e^{\cos \frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$; (e) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$; (f) $g(x,y,z) = x^2 + \dfrac{xz}{y} + yz^3$;

(g) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$; (h) $g(x,y,z) = \cos(x \sin(y \cos z))$; (i) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + \sqrt{y^2 + \sqrt{z^2 + 1}}}$.

3. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $(1, 3, z_0)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $(2, -1, z_0)$; (c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$;

(d) $z = (2 + x - 3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz; (e) $z = e^{x+y} - e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

4. (a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x + y - z = 5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, która jest prostopadła do prostej $x = t$, $y = t$, $z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

5. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościamu V, jeżeli pomiaru jego boków x, y, z dokonano z dokładnością odpowiednio Δ_x, Δ_y, Δ_z.

Ćwiczenia 2

---

6. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{3}/2,\ 1/2\right)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1,0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$.

7. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y)=x^3+xy^2+2$, $(1,-2)$; (b) $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$, $(e,1)$; (c) $f(x,y)=(1+xy)^y$, $(0,0)$;

(d) $g(x,y,z)=x\sqrt{y}-e^z\ln y$, $(0,1,0)$; (e) $g(x,y,z)=\dfrac{x}{y+\sin z}$, $(0,1,\pi)$; (f) $g(x,y,z)=\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{z}}}$, $(1,1,1)$.

8. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $(x_0,y_0)=(-3,4)$, $\boldsymbol{v}=(12/13,\ 5/13)$;

(b) $f(x,y)=x-\dfrac{y}{x^2}+y$, $(x_0,y_0)=(1,1)$, $\boldsymbol{v}=(3/5,\ -4/5)$;

(c) $g(x,y,z)=e^{x^2y-z}$, $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,-1)$, $\boldsymbol{v}=(2/3,\ -2/3,\ 1/3)$.

9. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=y-x^2+2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2,-1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y)=\sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

10. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f i g :

(a) $f(x,y)=\cos\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f(x,y)=ye^{xy}$; (c) $f(x,y)=x^2+\dfrac{y^3}{x}$;

(d) $f(x,y)=y\ln\dfrac{x}{y}$; (e) $g(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$; (f) $g(x,y,z)=\ln\left(x+y^2+z^3+1\right)$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

11. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek $f_{xx}+f_{yy}=0$ (równanie Laplace'a):

(a) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$; (b) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$; (c) $f(x,y)=\cos x\cosh y$.

Ćwiczenia 3

12. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y)=x^3+3xy^2-51x-24y$; (b) $f(x,y)=xe^{-y}+\dfrac{1}{x}+e^y$; (c) $f(x,y)=xy^2(12-x-y)$ $(x,y>0)$;

(d) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$; (e) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$; (f) $f(x,y)=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$ $(x,y>0)$;

(g) $f(x,y)=xy+\ln y+x^2$; (h) $f(x,y)=e^{x-2y}+e^{y-x}+e^{6+y}$; (i) $f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

13. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint\limits_R \left(x+xy-x^2-2y\right)dxdy$, $R=[0,1]\times[0,1]$; (b) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x\,dxdy}{y^2}$, $R=[1,2]\times[2,4]$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $R=[0,2]\times[0,1]$; (d) $\displaystyle\iint\limits_R x\sin(xy)\,dxdy$, $R=[0,1]\times[\pi,2\pi]$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_R e^{2x-y}\,dxdy$, $R=[0,1]\times[-1,0]$; (f) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{(x+y)\,dxdy}{e^x}$, $R=[0,1]\times[0,1]$.

14. Całkę podwójną $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o równaniach:

(a) $y=x^2$, $y=x+2$; (b) $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$, $x=0$ $(x,y\geqslant 0)$;

(c) $x^2-4x+y^2+6y-51=0$; (d) $x^2-y^2=1$, $x^2+y^2=3$ $(x<0)$.

15. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx\int_x^{x^2}\frac{y}{x^2}\,dy$; (b) $\displaystyle\int_1^4 dx\int_x^{2x}x^2\sqrt{y-x}\,dy$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(x^3+y^3\right)dy$; (d) $\displaystyle\int_0^3 dy\int_0^y\sqrt{y^2+16}\,dx$.

Narysować obszary całkowania.

Ćwiczenia 4

16. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ \ D:\ y=x,\ y=2-x^2;$ (b) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy,\ \ D:\ y=-2,\ y=\dfrac{1}{x},\ y=-\sqrt{-x};$

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy,\ \ D:\ y=\sqrt{x},\ x=0,\ y=1/2,\ y=1;$ (d) $\iint\limits_D \left(xy+4x^2\right)\,dxdy,\ \ D:\ y=x+3,\ y=x^2+3x+3;$

(e) $\iint\limits_D x^2e^{xy}\,dxdy,\ \ D:\ y=x,\ y=1,\ x=0;$ (f) $\iint\limits_D \dfrac{x\,dxdy}{x^2+y^2},\ \ D:\ x=1,\ x=2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3};$

(g) $\iint\limits_D e^{x^2}\,dxdy,\ \ D:\ y=0,\ y=2x,\ x=\sqrt{\ln 3};$ (h) $\iint\limits_D (2x-3y+2)\,dxdy,\ \ D:\ y=0,\ y=\pi,\ x=-1,\ x=\sin y.$

17. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant \sqrt{3}x;$ (b) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2;$

(c) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1;$ (d) $\iint\limits_D x^2\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2y;$

(e) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x;$ (f) $\iint\limits_D y\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2x\ (y\leqslant 0).$

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

18. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2=4x,\ \ x+y=3,\ \ y=0\ (y\geqslant 0);$ (b) $x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-4y=0;$

(c) $x+y=4,\ \ x+y=8,\ \ x-3y=0,\ \ x-3y=5;$ (d) $x^2+y^2=2y,\ \ y=\sqrt{3}|x|.$

Ćwiczenia 5

19. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z=\sqrt{25-(x^2+y^2)},\ z=x^2+y^2-13;$ (b) $x^2+y^2+z^2=4,\ \ z=1\ (z\geqslant 1);$

(c) $x^2+y^2-2y=0,\ \ z=x^2+y^2,\ \ z=0;$ (d) $z=5-x^2-y^2,\ \ z=1,\ \ z=4;$

(e*) $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ \ z=xy,\ \ z=0;$ (f*) $2z=x^2+y^2,\ \ y+z=4.$

20. Obliczyć pola płatów:

(a) $z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2\leqslant 1;$ (b) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ \ x^2+y^2-Rx\leqslant 0,\ \ z\geqslant 0;$ (c) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ 1\leqslant z\leqslant 2;$

(d) część sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z=\left(x^2+y^2\right)/2.$

21. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-x};$ (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1};$ (c) $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty x\cos x\,dx;$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}};$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+25};$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{2x}\,dx.$

22. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)};$ (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2};$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1};$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\left(2^x+1\right)\,dx}{3^x+1};$ (e) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3};$ (f) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(3+\cos x)\,dx}{\sqrt{x}+2}.$

23. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x\,(x+1)};$ (b) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}};$ (c) $\displaystyle\int_2^\infty \left(e^{1/x}-1\right)\,dx;$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx;$ (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}.$

24. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \dfrac{1}{x^2+9}$ oraz osią Ox.

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x}\right\}$.

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x \geqslant 1)$ wokół osi Ox jest skończone.

Ćwiczenia 6

25. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

26. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

27. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

28. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^n\ln\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi/n^2\right)}{\sin\left(\pi/n\right)}$.

29. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$.

30. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

31. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

Ćwiczenia 7

32. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

33. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4x-12)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}$.

34. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\dfrac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\dfrac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\dfrac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

35. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0),\ f(x) = x^2\cos x$; (b) $f^{(20)}(0),\ f(x) = xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0),\ f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0),\ f(x) = x\sin^2\dfrac{x}{2}$.

36. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x \in (-1,1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

37. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

Przykładowe zadania z kolokwiów

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1+e^{-x}}}$.
2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.
3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n+1}{n3^n+1}$.
4. Uzasadnić zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n}$.
5. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}+2}$.
6. Funkcję $f(x) = \frac{x^2}{1+4x}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Podać wraz z uzasadnieniem przedział zbieżności.
7. Narysować dziedzinę i obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x,y) = \sqrt{y-x} \cdot \ln\left(9-x^2-y^2\right)$.
8. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 6$ w punkcie $(0,2,-1)$.
9. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \left(x^2-y\right)e^{2y-x}$ w punkcie $(x_0,y_0) = (1,1)$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\alpha = \pi/3$ z dodatnią częścią osi Ox.
10. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{y}$ w kierunku wersora $\left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$ przyjmuje wartość 0.
11. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y+1}{\sqrt{x}}$.
12. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2^{-x}}^{4^x} f(x,y)\,dy$.
13. Obliczyć pole części powierzchni sfery $x^2+y^2+z^2 = 3$ leżącej wewnątrz paraboloidy $2z = x^2+y^2$. Sporządzić rysunek.
14. Obliczyć całkę $\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{(x^2+y^2)^3}$, gdzie $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9,\ y \leqslant 0\right\}$.
15. Obliczyć objętosc bryły U ograniczonej powierzchniami: $x^2+y^2 = 1$, $z = x^2+y^2-3$, $z = 5-\sqrt{x^2+y^2}$.

Przykładowe zestawy zadań z egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}(2-3x)^n$.
2. Funkcję $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ oraz jej drugą pochodną rozwinąć w szeregi Maclaurina. Podać promienie ich zbieżności.
3. Wyznaczyć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 15x$ w punktach, w których są one równoległe do płaszczyzny $6x - 2y - z = 0$.
4. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$.
5. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $z = 3 - y^2$, $z = 2y$, $x = 0$, $x = 1$. Sporządzić rysunek.
6. Obliczyć pole części powierzchni $z = x^2 + y^2$ leżącej między płaszczyznami $z = 1$ i $z = 4$. Sporządzić rysunek.

Zestaw B

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n + 1}{n3^n + 1}$.
2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{8}{y^2}$.
3. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x + y^2\right)$ w punkcie $\left(0, 2+\sqrt{2}\right)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt $\frac{\pi}{4}$ z dodatnim zwrotem osi Ox. W którym z ośmiu geograficznych kierunków: N, W, S, E, NW, NE, SW, SE szybkość wzrostu funkcji f w punkcie $\left(0, 2+\sqrt{2}\right)$ jest największa?
   Uwaga. N-północ, W-zachód, S-południe, E-wschód.
4. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce $\int\limits_{1}^{16} dx \int\limits_{\log_4 x}^{\log_2 x} f(x,y)\, dy$.
5. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x\, dx}{x^4 + 1}$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}(4+2x)^n$.
2. Napisać rozwinięcie funkcji $f(x) = \frac{x^2}{3x^2-2}$ w szereg Maclaurina, a następnie obliczyć $f^{(17)}(0)$, $f^{(18)}0)$.
3. Wyznaczyć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 15x$ w punktach, w których są one równoległe do płaszczyzny $6x - 2y - z = 0$.
4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \ln x^4 + \ln y^2 - 4y^2 - x$.
5. Na płaszzczyźnie zaznaczyć obszar D ograniczony krzywymi $x = y^2$, $x = 2 - y^2$. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D xy\,dxdy.$$
6. Narysować bryłę ograniczoną powierzchniami $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 3 - x^2 - y^2$ i obliczyć jej objętość.

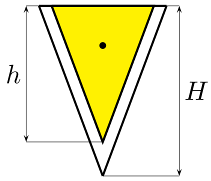
Zestaw B

1. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x+4)^n$.
2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+3^n}{n!}$.
3. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $f(x,y) = \ln\left(2 + x^2y - y^2\right)$ w punkcie, w którym jest ona równoległa do płaszczyzny $2y + z = 0$.
4. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2+x^2} f(x,y)\,dy.$$
5. Obliczyć pole części powierzchni sfery $x^2+y^2+z^2 = 3$ leżącej wewnątrz paraboloidy $2z = x^2+y^2$. Sporządzić rysunek.
6. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x}$ korzystając z kryterium: (a) ilorazowego; (b) porównawczego.

Egzamin na ocenę celującą

Zestaw z 2016 r.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3\ln\left(n^2+1\right) - 2\ln\left(n^3+1\right)\right)$.
2. Wafelek do loda ma kształt stożka wydrążonego o wysokości H z jednakową grubością ścianek (rysunek). Masa lodowa (stożek) wypełniająca wafelek ma wysokość h $(h < H)$. Przyjmując, że wafelek i masa są jednorodne, a gęstość masy jest 2 razy większa od gęstości wafelka, wyznaczyć położenie środka masy całego loda.



3. Kątem nachylenia gładkiej powierzchni w ustalonym jej punkcie nazywamy kąt ostry między płaszczyzną styczną w tym miejscu, a poziomem. Obliczyć średni kąt nachylenia wzgórza o równaniu

$$z = \frac{1}{4} - x^2 - y^2 \quad (z \geqslant 0).$$

4. Trzy boki czworokąta wypukłego mają długość 1. Jaka powinna być długość czwartego boku czworokąta oraz jak powinien być on ukształtowany, aby miał największe pole?

Źródła zadań

[**1**] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2019.

[**2**] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2019.

[**3**] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2018.

[**4**] Z.Skoczylas, *Studencki konkurs matematyczny*, Wrocław 2020.