

Analiza matematyczna 1 (2020/2021)

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań[‡] obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek. Na ćwiczeniach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Wyjątkiem są zadania oznaczone literą (P) oraz symbolem (*). Zadania oznaczone literą są proste i należy je rozwiązać samodzielnie. Z kolei zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Na końcu listy zadań umieszczono zestawy zadań z egzaminu podstawowego i poprawkowego, a także z egzaminu na ocenę celującą.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

<http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnuczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca>

Lista pierwsza

1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:

- (a) „Wrocław był stolicą Polski”; (b) „liczba 333333 jest podzielna przez 9”;
(c) „ $a^2 + b^2 = c^2$ ”; (d) „trójkąt o bokach 5, 7, 13 jest ostrokątny”;
(e) „ $2^5 \geq 32$ ”; (f) „ $\Delta = b^2 - 4ac$ ”.

2. Napisać zaprzeczenia zdań:

- (a) „piję piwo i oglądam mecz w TVN”;
(b) „kwadrat nie jest pięciokątem”;
(c) „przez Poznań przepływa Odra lub Warta”;
(d) „jeśli funkcja f jest rosnąca, to funkcja $-f$ jest malejąca”;
(e) „liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 oraz przez 3”;
(f) „czworokąt jest równoległobokiem albo ma przekątne różnej długości”.

3. Ocenąć prawdziwość zdań złożonych:

- (a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na \mathbb{R} ”;
(b) „ $(-1)^{44} = -1$ lub 2018 jest liczbą parzystą”;
(c) „funkcja $g(x) = \sin x + \cos(\pi/12)$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ – nieparzysta”;
(d) „jeżeli czworokąt jest rombem, to jego przekątne przecinają się pod kątem prostym”;
(e) „liczba 2016 jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z jej końcowych trzech cyfr jest podzielna przez 8”;
(f) „Ziemia ma kształt kuli albo funkcja $f(x) = \sin x$ jest okresowa”.

[‡]Zadania zaczerpnięto z książek: *Analiza matematyczna 1 (Definicje, twierdzenia, wzory; Przykłady i zadania; Kolokwia i egzaminy)*, *Wstęp do analizy i algebry* oraz *Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami*.

4. Używając tylko kwantyfikatorów, spójników logicznych oraz relacji $=$, \neq , $<$, \leq zapisać stwierdzenia:

(a) funkcja f nie jest rosnąca na przedziale $[0, 1]$;

(b) $x \in [-1, 2]$;

(c) układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 10 \end{cases}$ nie ma rozwiązań;

(d) równanie $x^7 + 3x^5 + 1 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste;

(e) liczba 2017 jest pierwsza.

5. Zbadać, czy podane formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

(a) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^x = 27$; (b) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 4x + 3 > 0$; (c) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} x^2 + y^3 = 0$;

(d) $\bigvee_{y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} xy = 0$; (e) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} (y \leq x) \vee (y > x)$; (f) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} \sin x + \cos(x + y) = 0$.

6. Dla par zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c , B^c :

(a) $A = (0, 5)$, $B = [0, 7]$; (b) $A = (-\infty, 3)$, $B = [-1, \infty)$; (c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Wskazać te pary A, B , dla których $A \subset B$.

7. Określić i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x - 5}$; (b) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 + 1}$; (c) $f(x) = \sqrt{81 - x^4}$; (d) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$.

8. Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są parzyste lub nieparzyste:

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$; (b) $f(x) = |x^3 + x|$; (c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 2x}$.

9. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = 2 + 5x$, $(-\infty, \infty)$; (b) $f(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$.

10. Niech f będzie funkcją monotoniczną i dodatnią na przedziale. Uzasadnić, że funkcje $(-f)$, f^2 , $1/f$ też są monotoniczne. Korzystając z powyższego naszkicować wykresy podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

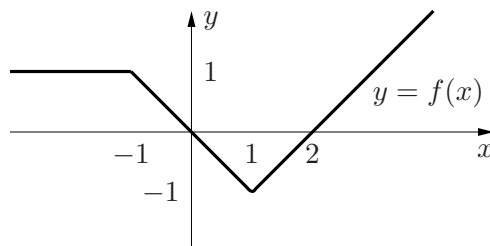
(a) $\frac{1}{1+x^4}$, $(-\infty, 0)$; (b) $\frac{-1}{1+2^x}$, $(-\infty, \infty)$; (c) $\frac{1}{(2+\cos x)^2}$, $(0, \pi)$; (d) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$, $(4, \infty)$.

Lista druga

11. Podać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

(a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x + 2$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;
(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$; (d) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.

12. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.



Narysować wykresy funkcji:

- (a) $y = f(x) + 5$; (b) $y = f(x + 2)$; (c) $y = -f(x)$; (d) $y = f(-x)$;
(e) $y = f(x)/2$; (f) $y = f(3x)$; (g) $y = |f(x)|$; (h) $y = f(|x|)$.

13. Rozwiązać równania:

- (a) $x^3 + 2x^2 + x = 0$; (b) $x^3 + x^2 + 2x = 0$; (c) $x^4 - 16 = 0$;
(d) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$; (e) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0$; (f) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$.

14. Rozwiązać nierówności:

- (a) $(x - 2)(x^2 + 2x - 3) > 0$; (b) $(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 6) \leq 0$; (c) $(4x^2 - 25)^2 - (2x + 5)^2 > 0$;
(d) $x^3 - 4x^2 + 4x < 0$; (e) $x^4 + 2x^3 - x - 2 \geq 0$; (f) $x^4(x - 1)^3(x + 2)^2(x - 2) \leq 0$.

15. Rozwiązać równania:

- (a) $\frac{4x - 6}{2x^2 - x + 4} = 0$; (b) $\frac{3}{4x - 6} + \frac{2}{2x - 3} = \frac{1}{5}$; (c) $\frac{9x}{3x - 1} = \frac{3}{3x + 1} + 2$;
(d) $\frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - 2} = \frac{21}{x^2 - x - 2}$; (e) $\frac{2x - 1}{x} = \frac{3}{x + 1} + 1$; (f) $\frac{x - 4}{x - 2} - \frac{2}{x + 3} = \frac{x - 21}{x^2 + x - 6}$.

16. Rozwiązać nierówności:

- (a) $\frac{x^2 - 3x}{x + 3} < 0$; (b) $\frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 4)} \geq 0$; (c) $2 + \frac{3}{x + 1} > \frac{2}{x}$;
(d) $\frac{x^2 + 5x}{x - 3} > x$; (e) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0$; (f) $\frac{-x^2 + 2x + 4}{x - 2} \leq 1$.

Lista trzecia

17. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych przedziałach:

- (a) $f(x) = x + x^3$, $(-\infty, \infty)$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(0, \infty)$.

18. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

- (a) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$; (b) $f(x) = 3 - \sqrt{4 - x^2}$, $(-2 \leq x \leq 0)$; (c) $f(x) = 3^{x+1}$;
(d) $f(x) = \log(x + 3)$; (e) $f(x) = -x^4$, $(x \leq 0)$; (d) $f(x) = x^2 - 4x$, $(x \leq 2)$.

19. (P) Korzystając z własności logarytmów obliczyć:

- (a) $\log_6 3 + \log_6 12$; (b) $\log_3 18 - \log_3 2$; (c) $9 \log_6 \sqrt[3]{36}$;
(d) $3 \log_2 3 \cdot \log_3 4$; (e) $3 \log_4 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_4 3 + 3 \log_4 2 - \log_4 6$; (f) $\frac{\log_2 54 - \log_2 6}{\log_2 27 - \log_2 9}$.

20. Rozwiązać równania lub nierówności:

- (a) $2^{x+2} = 3^{2x+1}$; (b) $2e^x - 5 \cdot e^{-x} = 9$;
(c) $5^x \cdot 2^{x+1} \leq 5^{2x} \cdot 2^{2x}$; (d) $e^x - e^{-x} > 2$.

21. Rozwiązać równania:

- (a) $4 \log_2 x = \log_2 81$; (b) $\log_4(x + 4) - \log_4(x - 1) = 2$;
(c) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) + \log_{\frac{1}{2}} x = -2$; (d) $\log_2(x^2 - 6) = 3 + \log_2(x - 1)$;
(e) $2 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} - \log_{\frac{1}{3}}(6x - 1) = 0$; (f) $\log x + \log(x - 1) = \log(3x + 12)$.

22. Rozwiązać nierówności:

- (a) $\log_5(5 - 3x) > 1$; (b) $\log(3x - 1) - \log(x - 1) > \log 2$;
(c) $\log_{\frac{1}{5}}(2x + 1) < 1 + \log_{\frac{1}{5}}(16 - x^2)$; (d) $\log_2(x - 2) + \log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) > 1$;
(e) $\frac{2}{\log_{\frac{1}{3}} x} \geq 1 - \log_3 x$; (f) $\ln x + \frac{1}{\ln x} > 0$.
-

Lista czwarta

23. (P) Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ naszkicować wykresy funkcji:

- (a) $y = \sin 3x$; (b) $y = \sin \frac{x}{2}$; (c) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{5}\right)$;
(d) $y = 1 + \sin x$; (e) $y = \frac{1}{2} \sin x - 1$; (f) $y = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

24. Narysować wykresy funkcji:

- (a) $y = |\cos x|$; (b) $y = \sin x - 2|\sin x|$; (c) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$; (d) $y = \frac{|\sin 2x|}{\cos x}$.

25. Podane funkcje wyrazić za pomocą sinusa i cosinusa wielokrotności kąta α :

- (a) $\sin^2 \alpha$; (b) $\cos^2 \alpha$; (c) $\sin^4 \alpha$; (d) $\cos^4 \alpha$.

26. Rozwiązać równania:

- (a) $\sin x = -\frac{1}{2}$; (b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\operatorname{tg} x = 1$;
(d) $\sin x = -\sin 2x$; (e) $\cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; (f) $\operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} x$;
(g) $\cos 4x = \sin \frac{x}{2}$; (h) $\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; (i) $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 2x$.

27. Rozwiązać równania:

- (a) $\sin^2 x + \cos x \sin x = 0$; (b) $\sin x - 2 = \cos 2x$; (c) $\cos 4x = 2 - 3 \sin 2x$;
(d) $\sin^3 x - 4 \sin^2 x - \sin x = -4$; (e) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1 = 0$; (f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

28. Rozwiązać nierówności:

- (a) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $\cos x \geq \frac{1}{2}$; (c) $\operatorname{tg} x < -1$; (d) $\operatorname{ctg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
(e) $2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \geq \sqrt{3}$; (f) $2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) < -1$; (g) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) > -1$; (g) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$.

29. (P) Podaj wartości wyrażeń:

- (a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{1}{2}$; (b) $\operatorname{arctg} 1 \cdot \operatorname{arctg} 1$; (c) $\frac{\arcsin(-\sqrt{3}/2)}{\arcsin 1}$; (d) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

30. * Obliczyć:

- (a) $\sin(\arccos 1/3)$; (b) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$; (c) $\operatorname{tg}(\arccos 3/5)$; (d) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$.

31. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

- (a) $f(x) = \arcsin(2x + 1)$; (b) $f(x) = \arccos \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$; (c) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}$; (d) $f(x) = \operatorname{arctg} 2^x$.

Lista piąta

32. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

(a) $a_n = \frac{2 + \sin n}{3 - 2 \cos n}$; (b) $a_n = \sqrt[n]{3^n - 1}$; (c) $a_n = 2 - \sqrt{n}$;
(d) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$; (e*) $a_n = \frac{1}{4^1 + 1} + \frac{1}{4^2 + 2} + \dots + \frac{1}{4^n + n}$.

33. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

(a) $a_n = 3^{n+1} - 2^n$; (b) $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$; (c) $a_n = \frac{7^n}{n!}$;
(d) $a_n = \sqrt{n^2 - 6n + 10}$; (e) $a_n = \frac{4^n}{2^n + 3^n}$; (f) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$.

34. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnić równości:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n}{n + 5} = -1$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$.

35. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{n + 4}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{2n^2 - 1}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{n - 2n^3}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^3 (3n + 1)^5}{(6n^2 + 2n + 1)^4}$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{5^n - 4^{n+2}}$;
(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)n! + 1}{(2n + 1)(n + 1)!}$; (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n})$; (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n^3 + 1}}$.

36. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + (-1)^n}{5n + 2}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor n\sqrt{12} \rfloor}{\lfloor n\sqrt{3} \rfloor}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + \cos 2n}$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^{2n+1} + 3^{3n+2}}$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$.

37. Obliczyć granice z liczbą e :

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n-2}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n + 2}{5n + 1} \right)^{15n}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 4}{n + 3} \right)^{5-2n}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{5n} \right)^n \left(\frac{5n + 1}{2n} \right)^n$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 1}{3n - 1} \right)^n$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n + 1} \right)^n$;
(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \ln n}{\ln n} \right)^{\ln n^2}$; (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^n - (n + 2)^n}{(n + 2)^n - (n + 3)^n}$.

38. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1)$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n - 3^n)$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (n + 1)!}{n! + 2}$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\operatorname{arc\,ctg} n}$.

Lista szósta

39. Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej lub niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x-1)^3 = 8$; (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

40. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2}{x^2 - x + 1}$; (b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$;
(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^3 + 1)^7}{(x+1)^9 (2x^2 + 1)^6}$; (f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - 2}{x+2}$; (g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} + x)$; (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2}{4^x - 2}$;
(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}$; (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$; (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2}{x + 1}$; (l) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

41. Obliczając granice jednostronne obliczyć, czy istnieją granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sgn} x$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$; (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

42. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równości:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2} = 0$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = 0$; (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos 2x}{x^2} = 0$.

43. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x-4)}{\sqrt{x}-2}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 3x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x}$;
(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$; (e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}$; (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x}$;
(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{x}$; (h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x + 2}$; (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\pi - x^e}{x - 1}$;
(j) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$; (k) $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \operatorname{tg}(2x)]^{\operatorname{ctg} x}$; (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[6]{1-x}}{x}$.

44. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$; (b) $f(x) = \frac{x^{11} + 1}{(x-1)^{10}}$; (c) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$;
(d) $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + 2}{x+1}$; (e) $f(x) = \frac{3^x}{3x-2}$; (f) $f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x}$;
(g) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x - 1}$; (h) $f(x) = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; (i) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x - 1}$.

Lista siódma

45. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe na \mathbb{R} :

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ a + b \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{dla } x > \pi/2; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} + 1 & \text{dla } x < -1, \\ b - 2x & \text{dla } x \geq -1; \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{dla } x < -1, \\ 2x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 + bx & \text{dla } x > 0. \end{cases}$

Naszkiecować wykres funkcji z przykładu (a).

46. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić ich rodzaj:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & \text{dla } x \neq 1, 2 \\ 1 & \text{dla } x = 1, \\ 1/4 & \text{dla } x = 2; \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x^2) - \ln(x^2+1)} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases} \quad (d) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

47. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

$$(a) x^3 + 6x - 2 = 0, [0, 1]; \quad (b) x \sin x = 7, \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]; \quad (c) \ln(x+2) + x = 0, [-1, 0];$$

$$(d) (\sqrt{x} + 1)^7 = 2 - x, [0, 1]; \quad (e) 3^x + x = 3, [0, 1]; \quad (f) 2^x + 8^x = 11, [1, 2].$$

Wyznaczyć przybliżone rozwiązanie równania (a) z dokładnością 0.125.

(*) Dlaczego jedynym rozwiązaniem równania $x + \log_2 x + 3^x = 12$ jest $x = 2$?

Lista ósma

48. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

$$(a) f(x) = x^4 \quad (x \in \mathbb{R}); \quad (b) f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (x \neq 1); \quad (c) f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0); \quad (d) f(x) = \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

49. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$(a) f(x) = |x^2 - x|, \quad x_0 = 1; \quad (b) f(x) = \sin x \cdot \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = 0; \quad (c) f(x) = \min\{x^2, 4\}, \quad x_0 = 2.$$

Naszkieować wykresy tych funkcji.

50. Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe na wspólnym przedziale, obliczyć pochodne funkcji:

$$(a) y = xf\left(\frac{1}{x}\right); \quad (b) y = \frac{f(x^2)}{x}; \quad (c) y = e^{-x}f(e^x);$$

$$(d) y = f(x)\cos g(x); \quad (e) y = \sqrt{f^2(x) - g^2(x)}; \quad (f) y = \arctg[f(x)g(x)];$$

$$(g) y = \ln \frac{f(x)}{g(x)}; \quad (h) y = \operatorname{tg} \frac{f(x)}{g(x)}; \quad (i) y = f(x)g\left(\frac{1}{x}\right).$$

51. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

$$(a) 3 \sin x + \operatorname{ctg} x; \quad (b) e^x(x^2 - x + 1); \quad (c) \frac{x^2 + 2}{x - 2}; \quad (d) e^{-x}(3x + 1)^2;$$

$$(e) \ln(x^2 + 1) \operatorname{tg} \sqrt{x}; \quad (f) e^{1/x} \arctg(3 - x); \quad (g) \ln(\cos^2 x + 1); \quad (h) \sqrt{\arccos(x^2)};$$

$$(i) \frac{\sqrt{5}}{(x^2 + 1)^3}; \quad (j) \frac{3 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}; \quad (k) (e^{-2x} + 1)^3; \quad (l) (\sin x)^x \quad (0 < x < \pi);$$

$$(m) (\arcsin x + \arccos x)^2; \quad (n) \ln(2x) + \ln \frac{3}{x}; \quad (o) \frac{\ln 2019}{x^2 + 1}; \quad (p) e^5 \sin 2x + \sqrt{\pi} \cos 3x.$$

52.* Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $(f^{-1})'(y_0)$, jeżeli:

$$(a) f(x) = x + \ln x, \quad y_0 = e + 1; \quad (b) f(x) = \cos x - 3x, \quad y_0 = 1;$$

$$(c) f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}, \quad y_0 = 3; \quad (d) f(x) = x^3 + 3^x, \quad y_0 = 4.$$

53. (P) Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

- (a) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $(1, f(1))$; (b) $f(x) = \ln(x^2 + e)$, $(0, f(0))$; (c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;
 (d) $f(x) = \sqrt{2^x + 1}$, $(3, f(3))$; (e) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$; (f) $f(x) = e^{1+(1/x)}$, $(x_0, 1)$.

54. (a) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.

(b) Wyznaczyć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z osią Ox .

(c) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.

(d) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.

(e) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy .

55.* (a) Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku $b = 200$ m. Kąt przy wierzchołku tego trójkąta, zmierzony z dokładnością 0.01 rad wynosi $\pi/3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?

(b) Średnica kulki metalowej, wyznaczona z dokładnością 0.01 mm, wynosi 6 mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tej kulki?

(c) Do szybu puszczo swobodnie kamień i zmierzono czas jego spadania z dokładnością 0.1 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można wyznaczyć głębokość sztolni, jeżeli czas spadania kamienia wyniósł 4.1 s? Przyjąć $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

(d) W biegu na 100 m czas mierzy się z dokładnością 0.01 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią prędkość zawodniczki, jeśli uzyskała ona czas 12.50 s?

Lista dziewiąta

56. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi}{2} x}{\ln x}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$;
 (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$; (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$; (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \operatorname{arc\,ctg} x$;
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$; (h) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1}{x^2} \right)$;
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$; (k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - x} \right)$; (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x$;
 (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x \right)^x$; (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\ln x}$; (o) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

57. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

- (a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$; (b) $f(x) = \sin x - \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$); (c) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$;
 (d) $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$; (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$; (f) $f(x) = xe^{-3x}$;
 (g) $f(x) = x \ln^2 x$; (h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; (i) $f(x) = 2^{x+1} - 4^x$.

Lista dziesiąta

58. Obliczyć drugą pochodną funkcji:

- (a) $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; (b) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$; (c) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;
(d) $f(x) = \arctg x$; (e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; (f) $f(x) = x^3 \ln x$.

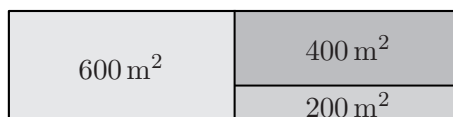
59. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

- (a) $f(x) = x^3 - 4x^2$; (b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; (c) $f(x) = \frac{2^x}{x}$;
(d) $f(x) = (x+1)e^{-x}$; (e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$; (f) $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$;
(g) $f(x) = x \ln x$; (h) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$; (i) $f(x) = 2 \arctg x - \ln(1+x^2)$.

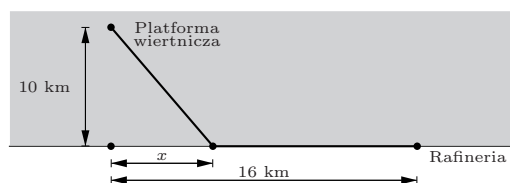
60. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach lub w ich dziedzinach naturalnych:

- (a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[1, 5]$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $[-2, 2]$;
(c) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{9-x}$; (d) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $[-1, 4]$;
(e) $f(x) = 1 - |9 - x^2|$, $[-5, 1]$; (f) $f(x) = \sin^3 x - 6 \sin x$, $[-\pi/2, \pi/2]$;
(g) $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$; (h) $f(x) = \frac{\cos x}{5+4 \sin x}$.

61. (a) Jakie wymiary powinna mieć prostokątna działka podzielona na trzy parcele o powierzchniach 600 m^2 , 400 m^2 i 200 m^2 (rys.) tak, aby łączna długość ogrodzenia tych parcel była najmniejsza?

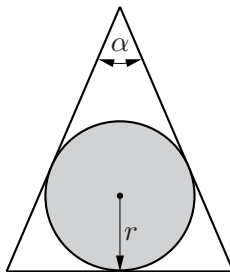


(b) Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od prostoliniowego brzegu. Ropa z platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie – 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

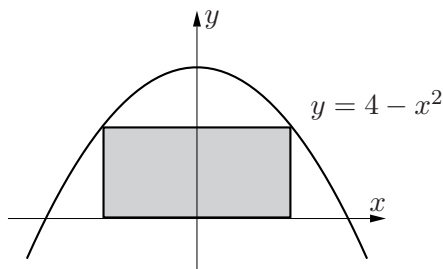


(c) Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22.50 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych – 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

(d) Jaki powinien być kąt α przy wierzchołku trójkąta równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?



(e) W parabolę o równaniu $y = 4 - x^2$ wpisano prostokąt, w sposób przedstawiony na rysunku. Znaleźć wymiary prostokąta, który ma największe pole.



Lista jedenasta

62. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int \left(x^3 + \frac{4}{x} - 3\sqrt{x} \right) dx; & \text{(b)} \int \frac{(1-x) dx}{1 + \sqrt{x}}; & \text{(c)} \int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}; \\
 \text{(d)} \int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}; & \text{(e)} \int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx; & \text{(f)} \int e^{-x} \cdot 3^{2x} dx.
 \end{array}$$

63. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \int x e^{-3x} dx; & \text{(b)} \int (x+1)^2 e^x dx; & \text{(c)} \int \sqrt{x} \arctg \sqrt{x} dx; & \text{(d)} \int \frac{x dx}{\cos^2 x}; \\
 \text{(e)} \int x^2 \sin x dx; & \text{(f)} \int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{x+1}}; & \text{(g)} \int \ln(x+1) dx; & \text{(h)} \int \arccos x dx; \\
 \text{(i)} \int e^{2x} \sin x dx; & \text{(j)} \int \sin x \sin 3x dx; & \text{(k)} \int \sin 3x \cos x dx; & \text{(l)} \int \cos x \cos 5x dx; \\
 \text{(m)} \int \sin^2 x dx; & \text{(n)} \int \cos^4 x dx; & \text{(o)} \int \ln(1+x^2) dx; & \text{(p}^*) \int x \sin x e^x dx.
 \end{array}$$

64. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; & \text{(b)} \int \frac{\sqrt{1+4x}}{x} dx; & \text{(c)} \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}; & \text{(d)} \int x \sin(x^2+4) dx; \\
 \text{(e)} \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}; & \text{(f)} \int (5-3x)^{10} dx; & \text{(g)} \int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx; & \text{(h)} \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}; \\
 \text{(i)} \int \frac{\ln x}{x} dx; & \text{(j)} \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}; & \text{(k)} \int \frac{5 \sin x dx}{3-2 \cos x}; & \text{(l)} \int x^3 e^{x^2} dx.
 \end{array}$$

Lista dwunasta

65.* Przyjmując w definicji całki oznaczonej podział równomierny przedziału całkowania obliczyć:

$$(a) \int_{-2}^1 (2x - 1) dx; \quad (b) \int_2^3 x^2 dx.$$

Wskazówka. Zastosować odpowiednio wzory

$$(a) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (b) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

66. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć całki:

$$(a) \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad (b) \int_0^2 \frac{x-1}{x+1} dx; \quad (c) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1};$$
$$(d) \int_{-1}^2 x(1+x^3) dx; \quad (e) \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) dx; \quad (f) \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx.$$

67.* Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz faktu, że funkcje ciągłe są całkowne uzasadnić równości:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{2n} \right) \right] = \frac{2}{\pi};$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n} + \dots + \sqrt{n+n} \right) \right] = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

68. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

$$(a) y = 2x - x^2, x + y = 0; \quad (b) y = x^2, y = x^2/2, y = 3x; \quad (c) y = 1/x^2, y = x, y = 4;$$
$$(d) y = 1, y = \frac{4}{x^2+1}; \quad (e) y = 2^x, y = 2, x = 0; \quad (f) y = \sin x, y = 1/2, (0 \leq x \leq \pi);$$
$$(g) y = 2\sqrt{x}, y = \sqrt{5-x}, y = 0; \quad (h) yx^4 = 1, y = 1, y = 16; \quad (i) y^2 = -x, y = x - 6, y = -1, y = 4.$$

69. Metodą całkowania przez części obliczyć całki oznaczone:

$$(a) \int_{-1}^1 x e^{-x} dx; \quad (b) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx; \quad (c) \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx;$$
$$(d) \int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx; \quad (e) \int_0^{\pi} x(1 + \cos x) dx; \quad (f) \int_0^1 \arcsin x dx.$$

70. Obliczyć całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

$$(a) \int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx, \cos x = t; \quad (b) \int_1^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, 1+x = t;$$
$$(c) \int_0^1 x\sqrt{1+x} dx, \sqrt{1+x} = t; \quad (d) \int_1^e \ln x dx, \ln x = t;$$
$$(e) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, x = t^2; \quad (f) \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx, x = 3 \sin t; \quad (g) \int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}, e^x = t.$$

Lista trzynasta

71. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

- (a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$; (b) $4y = x^2$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$; (c) $y = \ln x$, $x = e$, $y = -1$;
(d) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ ($0 < x < \pi/2$); (e) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 1$, $y = 2$; (f) $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 16$.

72. Obliczyć długości krzywych:

- (a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $2 \leq x \leq 3$; (b) $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$; (c) $y = 2\sqrt{x^3}$, $0 \leq x \leq 11$;
(e) $y = e^x$, $\frac{1}{2} \ln 2 \leq x \leq \frac{1}{2} \ln 3$; (g) $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, $1 \leq x \leq 2$; (h) $y = 1 - \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

73. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu figur T wokół wskazanych osi:

- (a) $T: 0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2x - x^2$, Ox ; (b) $T: 0 \leq x \leq \sqrt{5}$, $0 \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$, Oy ;
(c) $T: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq \operatorname{tg} x$, Ox ; (d) $T: 0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$, Oy ;
(e) $T: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^3$, Oy ; (f) $T: 1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$, Oy ;
(g) $T: 1 \leq x \leq 4$, $\frac{4}{x} \leq y \leq 5 - x$, Ox ; (h) $T: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \sin x + \cos x$, Ox ;
(i) $T: 0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$, $y = 2$; (j) $T: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x - x^2$, $x = 2$.

74. Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów funkcji f wokół wskazanych osi:

- (a) $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, Ox ; (b) $f(x) = \sqrt{4 + x}$, $-4 \leq x \leq 2$, Ox ;
(c) $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$, Oy ; (d) $f(x) = |x - 1| + 1$, $0 \leq x \leq 2$, Oy ;
(e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, Ox ; (f) $f(x) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{3}\right)$, $1 \leq x \leq 3$, Ox ;
(g) $f(x) = \frac{x - 1}{9}$, $1 \leq x \leq 10$, Oy ; (h) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, Oy .

75. (a) Wg prawa Hooke'a wydłużenie sprężyny jest wprost proporcjonalne (współczynnik k) do siły rozciągającej. Obliczyć pracę jaką należy wykonać, aby sprężynę o długości l rozciągnąć do długości L .

(b) Zbiornik ma kształt walca o osi poziomej. Średnica walca $D = 2$ m, a długość $L = 6$ m. Obliczyć pracę, jaką potrzeba wykonać, aby opróżnić zapełniony całkowicie wodą zbiornik. Otwór do opróżnienia zbiornika znajduje się w jego górnej części. Gęstość wody $\gamma = 1000$ kg/m³.

76. (a) Punkt materialny zaczął poruszać się prostoliniowo z prędkością początkową $v_0 = 10$ m/s i przyspieszeniem $a_0 = 2$ m/s². Po czasie $t_1 = 10$ s punkt ten zaczął poruszać się z opóźnieniem $a_1 = -1$ m/s². Znaleźć położenie punktu po czasie $t_2 = 20$ s od chwili rozpoczęcia ruchu.

(b) Dwie cząstki elementarne położone w odległości $d = 36$ zaczynają zbliżać się do siebie z prędkościami odpowiednio $v_1(t) = 10t + t^3$, $v_2(t) = -6t$, gdzie $t \geq 0$. Po jakim czasie nastąpi zderzenie tych cząstek?

Lista czternasta

77. Obliczyć całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int \frac{dx}{(x-3)^7}; \quad (b) \int \frac{dx}{x+5}; \quad (c) \int \frac{5 dx}{(2-7x)^3}; \quad (d) \int \frac{8 dx}{9x+20}.$$

78. Obliczyć całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$(a) \int \frac{dx}{x^2+4x+29}; \quad (b) \int \frac{(6x+3) dx}{x^2+x+4}; \quad (c) \int \frac{(4x+2) dx}{x^2-10x+29}; \quad (d) \int \frac{(x-1) dx}{9x^2+6x+2}.$$

79. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

$$(a) \int \frac{(x+2) dx}{x(x-2)}; \quad (b) \int \frac{x^2 dx}{x+1}; \quad (c) \int \frac{dx}{(x-1)x^2}; \quad (d) \int \frac{x^4 dx}{x^2-9};$$
$$(e) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}; \quad (f) \int \frac{(4x+1) dx}{2x^2+x+1}; \quad (g) \int \frac{2 dx}{x^2+6x+18}; \quad (h) \int \frac{dx}{x(x^2-4)};$$
$$(i) \int \frac{(5-4x) dx}{x^2-4x+20}; \quad (j) \int \frac{x^2 dx}{x^2+2x+5}; \quad (k) \int \frac{dx}{x(x^2+4)}; \quad (l) \int \frac{x dx}{x^4-1}.$$

80. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

$$(a) \int \sin^3 x dx; \quad (b) \int \sin^4 x \cos^3 x dx; \quad (c) \int \cos^4 x dx;$$
$$(d) \int \sin^3 x \cos^6 x dx; \quad (e) \int \cos^2 x \cos 2x dx; \quad (f^*) \int \sin^2 2x \sin^2 x dx.$$

81. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

$$(a) \int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}; \quad (b) \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} dx; \quad (c) \int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x};$$
$$(d) \int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos x}; \quad (e) \int \frac{dx}{1 - \operatorname{tg} x}; \quad (f) \int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x};$$
$$(g) \int \frac{dx}{\sin x}; \quad (h) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}; \quad (i) \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}.$$

Tematy dodatkowe (Mechaniczno-Energetyczny)

1. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f , punktów x_0 oraz n :

(a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$;

(c) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$; (d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$.

2. Napisać wzory Maclaurina z n -tą resztą Lagrange'a dla funkcji:

(a) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$; (b) $f(x) = \cosh x$; (c) $f(x) = \cos x$; (d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

3. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

(a) $\operatorname{tg} x \approx x$, $|x| \leq \frac{\pi}{12}$; (b) $\cos^2 x \approx 1 - x^2$, $|x| \leq 0.1$;

(c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $|x| \leq 0.25$; (d) $\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $|x| < 0.1$.

4. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

(a) $1/e$ z dokładnością 10^{-3} ; (b) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3} ;

(c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4} ; (d) $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5} .

5. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

(a) $f(x) = x(x-1)(x-3)$; (b) $f(x) = xe^{-x}$; (c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+12}$;

(d) $f(x) = \ln(1+x^2)$; (e) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; (f) $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - 4\ln|x|$;

(g) $f(x) = \sin x + \frac{1}{8}\sin 2x$; (h) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$; (i) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

6. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

(a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; (b) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$; (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$;

(d) $f(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$; (e) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; (f) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

(g) $f(x) = xe^{2x}$; (h*) $f(x) = \sin x + \sin 3x$; (i) $f(x) = x^2 \ln x$.

Przykładowe zestawy zadań z egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe: $y = \ln x$, $x = e^2$, $y = -1$. Sporządzić rysunek.
2. Metodą podstawiania obliczyć całkę $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$.
3. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+9} - n}{\sqrt{n^2+4} - n}$.
4. W przedziale $[-3, 4]$ wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x\sqrt{25-x^2}$.
5. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\sin \pi x}$.
6. Dobrać parametry p, q tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} e^x + x & \text{dla } x \leq 0, \\ x^2 + px + q & \text{dla } 0 < x \end{cases}$ miała pochodną w punkcie $x_0 = 0$. Narysować wykres otrzymanej funkcji.

Zestaw B

1. Znaleźć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$.
2. Obliczyć całkę $\int \frac{(4x+6) dx}{x^2+4x+13}$.
3. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^5)}{\sin(2x^2)\sin(3x^3)}$.
4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) wokół osi Ox .
5. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 \ln x$.
6. Wyznaczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(n+1)!}{n^2(n!+4)}$.

Zestaw C

1. Obliczyć całkę $\int x^2 \sin x dx$.
2. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x) = (x-3)e^x$.
3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez krzywe: $y = 3x^2 - 6x$, $y = 6 + 3x - 3x^2$. Sporządzić rysunek.
4. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$, która jest prostopadła do prostej $x + 2y - 3 = 0$.
5. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \sqrt{n^2 + 5n + 2} - \sqrt{n^2 + 3n + 1}$.
6. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x$.

Zestaw D

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykres funkcji $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) oraz prostą $y = 1/2$. Sporządzić rysunek.
2. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = (2 - x)e^{2x}$.
3. Obliczyć całkę $\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 6x + 25}$.
4. Pokazać, że równanie $x + \ln x - 2 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.
5. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + 1)(3^{n+1} + 2)}{6^n + 5}$.
6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Obliczyć granicę ciągu $a_n = n(n - \sqrt{n^2 - 1})$.
2. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-2}$.
3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.
4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych, wykresem paraboli $y = x^2 + 3$ i styczną do niej w punkcie o odciętej $x_0 = 3$. Sporządzić rysunek.
5. Ile materiału stracimy wycinając z blachy w kształcie półkola o promieniu R prostokąt o największym polu?
6. Podstawiając $\arctg x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\int \frac{\ln(2 \arctg x) dx}{1 + x^2}$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw B

1. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\frac{x^2 + x + 4}{x^3 + 4x}$. Sprawdzić otrzymany wynik.
2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x - 1}$ oraz starannie go naszkicować.
3. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.
4. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \frac{1}{2^n (\sqrt{2^{2n} + 1} - 2^n)}$.
5. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} 2x \ln x$.
6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji: $y = 0$, $y = \ln x$, $y = \ln(1 - x)$.

Zestaw C

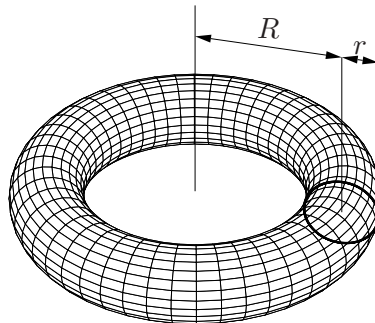
1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{x(x+1)}{x+2}$.
2. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt{n(n+1)} - n$.
3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = (x^2 - 6x + 2)e^x$ jest jednocześnie malejąca i wklęsła.
4. Narysować i obliczyć pole obszaru ograniczonego osią Ox , wykresem funkcji $y = x^3$ i styczną do niego w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.
5. Z kawałków blachy w kształcie koła o promieniu R wycinamy prostokątne podkładki. Wyznaczyć ich wymiary tak, aby odpady były najmniejsze.
6. Podstawiając $\sin x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\int \sin x \cos x \arctg \sin x dx$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw D

1. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\operatorname{tg} x)$.
2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $g(x) = \frac{3x^2 + 4x - 5}{2 - 3x}$ oraz starannie go naszkicować.
3. Obliczyć granicę ciągu $y_n = 3n(\sqrt{4n^2 - 1} - 2n)$.
4. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $g(x) = \frac{x^3}{3} + \arctg \frac{1}{x}$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła.
5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
6. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\frac{6x}{4 - 9x^2}$. Sprawdzić otrzymany wynik.

Egzamin na ocenę celującą (luty 2016 r.) §

1. Pokazać, że dla pewnej liczby naturalnej n rozwinięcie dziesiętne \sqrt{n} zaczyna się układem cyfr 2016, a bezpośrednio po przecinku ma 7 „siódemek”. Pozostałe cyfry rozwinięcia mogą być dowolne.
2. Jakie wartości może przyjąć granica $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^2)}{f(x)}$, gdy f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, 1)$ i dodatnią na $(0, 1)$?
3. Znaleźć wielomian, który tylko w -1 i 2 ma ekstrema lokalne właściwe (odpowiednio minimum i maksimum), a ponadto tylko w 0 ma punkt przegięcia.
4. Niech funkcja f będzie ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$ ($a \geq 0$). Wyprowadzić wzór na objętość bryły powstałej z obrotu obszaru $\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ wokół osi Oy . Korzystając z niego obliczyć objętość torusa, tj. bryły powstałej z obrotu koła o promieniu r wokół osi oddalonej o R ($R > r$) od jego środka.



§Zadania z egzaminów na ocenę celującą z lat 1994-2020 wrza z rozwiązaniami można znaleźć w książce „Studencki konkurs matematyczny”.