Algebra z geometrią analityczną (2020/2021)

Opracowanie: dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań* obejmuje cały materiał kursu oraz określa rodzaje i przybliżony stopień trudności zadań, które pojawią się na kolokwiach i egzaminach. Na ćwiczeniach należy rozwiązać 1-2 podpunkty z każdego zadania. Zadania oznaczone gwiazdką są trudne. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Na końcu listy umieszczono przykładowe zestawy zadań z egzaminu podstawowego i poprawkowego oraz egzaminu na ocenę celującą.

Uzdolnionym studentom proponujemy udział w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów z kilku ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca

Lista zadań

1. Uprościć wyrażenia:
(a) $\frac{34}{3\sqrt{2}-1}$; (b) $\frac{\left(a^3b^2\right)^5}{\left(a^4b^2\right)^3}$; (c) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^5}}$; (d) $x-4x^3+16x^5-\cdots \left(|x|<\frac{1}{2}\right)$;
(e) $\frac{y^3-x^3}{x^2-y^2}$; (f) $\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt[4]{a^7}}$; (g) $\frac{1}{x+\sqrt{5}}-\frac{1}{x-\sqrt{5}}$; (h) $\frac{x}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-1}$

2. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:
(a) $(2x-y)^4$; (b) $\left(c+\sqrt{2}\right)^6$; (c) $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^5$; (d) $(\sqrt{u}-\sqrt[4]{v})^8$.

3. (a) W rozwinięciu wyrażenia $\left(a^3+\frac{1}{a^2}\right)^{15}$ znaleźć współczynnik przy a^5;
(b) W rozwinięciu wyrażenia $\left(\sqrt[4]{x^5}-\frac{3}{x^3}\right)^7$ znaleźć współczynnik przy $\sqrt[4]{x}$.

★★★

4. Dla par macierzy A, B wykonać (jeśli to jest możliwe) działania $3A-\frac{1}{2}B$, A^T, AB, BA, A^2:
(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$;
(c) $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; (d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

*Zadania z listy pochodzą z książek *Algebra i geometria analityczna (Definicje, twierdzenia, wzory; Przykłady i zadania; Kolokwia i egzaminy)*, *Wstęp do analizy i algebry* oraz *Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami.*

5. Rozwiązać równanie macierzowe $3\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - X\right) = X + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

6. Znaleźć niewiadome x, y, z spełniające równanie $2\begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{bmatrix}^T$.

★★★

7. Napisać rozwinięcia Laplace'a wyznaczników wg wskazanych kolumn lub wierszy (nie obliczać wyznaczników w otrzymanych rozwinięciach):

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & \mathbf{3} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$, trzecia kolumna; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$, czwarty wiersz.

8. Obliczyć wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

9. Korzystając z własności wyznaczników uzasadnić, że macierze są osobliwe:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

10. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej wyznaczyć macierze odwrotne do:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Korzystając z metody dołączonej macierzy jednostkowej znaleźć macierze odwrotne do :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Znaleźć rozwiązania równań macierzowych:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$;

(e) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

13. Znaleźć rząd macierzy[†]:

(a) $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{bmatrix}$; (b) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&4\\5&0&6\end{bmatrix}$; (c) $A=\begin{bmatrix}1&-2&1&3&2\\3&1&-1&0&4\\7&0&-1&3&10\end{bmatrix}$; (d) $A=\begin{bmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&3&5\end{bmatrix}$.

★★★

14. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć wskazaną niewiadomą z układów równań liniowych:

(a) $\begin{cases}2x-\ \ y=0,\\3x+2y=\ 5\end{cases}$ $->\ y$; (b) $\begin{cases}x+y+2z=-1,\\2x-y+2z=-4,\\4x+y+4z=-2;\end{cases}$ $->\ x$; (c) $\begin{cases}2x+3y+11z+5t=\ \ 2,\\x+\ \ y+\ \ 5z+2t=\ \ 1,\\2x+\ \ y+\ \ 3z+2t=-3,\\x+\ \ y+\ \ 3z+4t=-3.\end{cases}$ $->\ z$.

15. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań:

(a) $\begin{cases}x+y+2z=-1,\\2x-y+2z=-4,\\4x+y+4z=-2;\end{cases}$ (b) $\begin{cases}3x-2y-5z+\ \ t=\ \ 3,\\2x-3y+\ \ z+5t=-3,\\x+2y\qquad\ \ -4t=-3,\\x-\ \ y-4z+9t=\ 22;\end{cases}$

(c) $\begin{cases}2x+y-\ \ z+\ \ t=1,\\\qquad y+3z-3t=1,\\x+y+\ \ z-\ \ t=1;\end{cases}$ (d) $\begin{cases}x+2y-z-\ \ t=1,\\x+\ \ y+z+3t=2,\\3x+5y-z+\ \ t=3.\end{cases}$

16. (a) Znaleźć trójmian kwadratowy, którego wykres przechodzi przez punkty $(-1,2)\,,(0,-1)\,,(2,4)$.

(b) Wyznaczyć współczynniki a,b,c funkcji $y=a2^x+b3^x+c4^x$, która w punktach $-1,0,1$ przyjmuje odpowiednio wartości 3/4, 1, 1.

(c) Funkcja $y\,(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$ spełnia równanie różniczkowe $y''-6y'+13y=25\sin 2x$. Wyznaczyć współczynniki A,B.

(d) Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty: $O=(0,0)$, $A=(6,0)$, $B=(0,8)$.

(e) Funkcję wymierną $\dfrac{x^3-19x-14}{(x-1)^2(x+3)^3}$ rozłożyć na ułamki proste.

17. (a) Dla jakich wartości parametru m podany układ jednorodny ma niezerowe rozwiązanie

$$\begin{cases}mx+y+\ \ 2z=0,\\2x-y+mz=0,\\mx+y+\ \ 4z=0?\end{cases}$$

(b) Dla jakich wartości parametrów a,b,c,d podany układ równań liniowych jest sprzeczny

$$\begin{cases}x+y\qquad\qquad=a,\\\qquad\qquad z+t=b,\\x\qquad\ +z\qquad=c,\\\qquad y\qquad\ +t=d?\end{cases}$$

(c) Znaleźć wartości parametru p, dla których podany układ równań liniowych ma tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{cases}x+2y-3z=-1,\\2x-py+\ \ z=\ \ 3,\\2x+\ \ y-pz=\ \ 5.\end{cases}$$

[†]Tylko dla Wydziału Chemicznego i Elektroniki

(d) Określić liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + \ \ py - \ \ z = 1, \\ 2x - \ \ \ y + pz = 0, \\ x + 10y - 6z = p \end{cases}$$

w zależności od parametru p. Rozwiązać ten układ dla $p = 3$.

★★★

18. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równań znaleźć ich rozwiązania:
(a) $\overline{z} = (2 - i)z$; (b) $z^2 + 4 = 0$; (c) $(1 + 3i)\, z + (2 - 5i)\, \overline{z} = 2i - 3$; (d*) $z^3 = 1$.

19. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:
(a) $\operatorname{Re}(z + 1) = \operatorname{Im}(2z - 4i)$; (b) $\operatorname{Re}\left(z^2\right) = 0$; (c) $\operatorname{Im}\left(z^2\right) \leqslant 8$; (d) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \operatorname{Im}(iz)$.

20. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych wyznaczyć i narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:
(a) $|z + 2 - 3i| < 4$; (b) $|z + 5i| \geqslant |3 - 4i|$; (c) $|z - 1| = |1 + 5i - z|$; (d) $|z + 3i| < |z - 1 - 4i|$;
(e) $|iz + 5 - 2i| < |1 + i|$; (f) $|\bar{z} + 2 - 3i| < 5$; (g) $\left|\frac{z - 3i}{z}\right| > 1$; (h) $\left|\frac{z^2 + 4}{z - 2i}\right| \leqslant 5$.

21. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć (wynik podać w postaci algebraicznej):
(a) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$; (b) $\left(\sqrt[5]{2} - i\sqrt[5]{2}\right)^{15}$; (c) $\left(2i - \sqrt{12}\right)^9$; (d) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{20}$; (e) $\left(\sin\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9}\right)^{24}$.

22. Wyznaczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej elementy pierwiastków:
(a) $\sqrt[4]{-16}$; (b) $\sqrt[3]{27i}$; (c*) $\sqrt[4]{(2 - i)^8}$; (d) $\sqrt[6]{8}$.

23. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:
(a) $z^2 - 2z + 10 = 0$; (b) $z^2 + 3iz + 4 = 0$; (c) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$;
(d) $z^2 + (1 - 3i)\, z - 2 - i = 0$; (e) $z^6 = (1 - i)^{12}$; (f*) $(z - i)^4 = (z + 1)^4$.

★★★

24. Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:
(a) $x^3 + 3x^2 - 4$; (b) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$; (c) $x^4 - x^2 - 2$.
(d) $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$; (e) $18x^3 - 9x^2 - 2x + 1$; (f) $6x^4 + 7x^2 + 2$.

25. Nie wykonując dzieleń wyznaczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli:
(a) $P(x) = x^8 + 3x^5 + x^2 + 4$, $Q(x) = x^2 - 1$;
(b) $P(x) = x^{47} + 2x^5 - 13$, $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$;
(c) $P(x) = x^{99} - 2x^{98} + 4x^{97}$, $Q(x) = x^4 - 16$;
(d*) $P(x) = x^{2006} + x^{1002} - 1$, $Q(x) = x^4 + 1$;
(e*) $P(x) = x^{444} + x^{111} + x - 1$, $Q(x) = \left(x^2 + 1\right)^2$.

26. Pokazać, że jeżeli liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego P, to liczba $\overline{z_1}$ także jest pierwiastkiem wielomianu P. Korzystając z tego faktu znaleźć pozostałe pierwiastki zespolone wielomianu $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 15$ wiedząc, że jednym z nich jest $x_1 = 1 + 2i$.

27. Podane wielomiany rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste:
(a) x^3-27; (b) x^4+16; (c) x^4+x^2+4; (d*) x^6+1.

28. Podane funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:
(a) $\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$; (b) $\dfrac{x+9}{x\,(x+3)^2}$; (c) $\dfrac{3x^2+4x+3}{x^3-x^2+4x-4}$; (d) $\dfrac{x^3-2x^2-7x+6}{x^4+10x^2+9}$.

★★★

29. (a) Dla jakich wartości parametrów p, q wektory $\boldsymbol{a}=(1-p,3,-1)$, $\boldsymbol{b}=(-2,4-q,2)$ są równoległe?
(b) Dla jakich wartości parametru s wektory $\boldsymbol{p}=(s,2,1-s)$, $\boldsymbol{q}=(s,1,-2)$ są prostopadłe?

30. Znaleźć wersor, który jest prostopadły do wektorów $\boldsymbol{u}=(-1,3,0)$, $\boldsymbol{v}=(0,1,1)$.

31. Wyznaczyć cosinus kąta między wektorami $\boldsymbol{p}=(0,3,4)$, $\boldsymbol{q}=(2,1,-2)$.

32.* W systemie GPS położenie punktu na powierzchni Ziemi określone jest przez parę liczb (φ,ψ), gdzie φ oznacza szerokość, a ψ – długość geograficzną tego punktu. Wyprowadzić wzór na najmniejszą odległość punktów $A_1=(\varphi_1,\psi_1)$, $A_2=(\varphi_2,\psi_2)$ liczoną po powierzchni Ziemi. Przyjąć, że Ziemia jest kulą o promieniu 6 400 km.

33. (a) Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\boldsymbol{u}=(-1,2,5)$, $\boldsymbol{v}=(0,3,2)$.
(b) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A=(0,0,1)$, $B=(3,0,0)$, $C=(0,-5,0)$.
(c) Trójkąt ma wierzchołki $A=(0,0,1)$, $B=(2,3,-2)$, $C=(1,1,4)$. Obliczyć wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

34. (a) Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{b}=(0,4,1)$, $\boldsymbol{c}=(-1,0,2)$.
(b) Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach: $A=(1,1,1)$, $B=(1,2,3)$, $C=(0,4,1)$, $D=(2,2,2)$.
(c) Dla czworościanu z punktu (b) obliczyć wysokość opuszczoną z wierzchołka A.

35. Znaleźć równania normalne i parametryczne płaszczyzny:
(a) przechodzącej przez punkty $P=(1,-1,0)$, $Q=(2,3,7)$, $R=(4,0,1)$;
(b) przechodzącej przez punkt $A=(-2,5,4)$ oraz zawierającą oś Oz;
(c) przechodzącej przez punkt $A=(-2,5,4)$ oraz prostopadłej do osi Oy.

36. (a) Płaszczyznę $\pi: 2x+y-z-7=0$ zapisać w postaci parametrycznej.
(b) Płaszczyznę $\pi: \begin{cases} x = t+s, \\ y = -2-2s, \\ z = 3+3t-s \end{cases}$ $(t,\, s\in\mathbb{R})$ przekształcić do postaci normalnej.

37. Znaleźć równanie parametryczne i krawędziowe prostej:
(a) przechodzącej przez punkty $A=(-3,4,1)$, $B=(0,2,1)$.
(b) przechodzącej przez punkt $P=(3,-1,2)$ i przecinającej prostopadle oś Oy.

38. (a) Prostą $l: \begin{cases} x+y-3=0, \\ -y+z-1=0 \end{cases}$ zapisać w postaci parametrycznej.
(b) Prostą $l: x=3,\ y=2-2t,\ z=t\ (t\in\mathbb{R})$ zapisać w postaci krawędziowej.

39. Wyznaczyć punkt przecięcia:

(a) prostej $l: x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -3 + 2t\ (t \in \mathbb{R})$ oraz płaszczyzny $\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0$;

(b) płaszczyzn $\pi_1 : x + 2y - z - 5 = 0$, $\pi_2 : x + 2y + 2 = 0$, $\pi_3 : x + y + z = 0$;

(c) prostych $l_1 : x = 1 - t,\ y = 1,\ z = -3 + 2t\ (t \in \mathbb{R})$, $l_2 : x = t,\ y = 3 - 2t,\ z = 2 - 5t\ (t \in \mathbb{R})$.

40. Obliczyć odległość:

(a) punktu $P = (0, 1, -2)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 4y + 12z - 1 = 0$;

(b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : x - 2y + 2z - 3 = 0$, $\pi_2 : -2x + 4y - 4z + 18 = 0$;

(c) punktu $P = (2, -5, 1)$ od prostej $l : x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -3 + 2t\ (t \in \mathbb{R})$;

(d) prostych równoległych $l_1 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z - 1 = 0, \end{cases}$ $\quad l_2 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0; \end{cases}$

(e) prostych skośnych

$$l_1 : x = 1 - t,\ y = 1,\ z = -3 + 2t\ (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : x = s,\ y = 3 - 2s,\ z = 1 - 5s\ (s \in \mathbb{R}).$$

41. Wyznaczyć rzut prostopadły punktu $P = (1, -2, 0)$ na:

(a) płaszczyznę $\pi : x + y + 3z - 5 = 0$; (b) prostą $l : x = 1 - t,\ y = 2t,\ z = 3t$.

42. Obliczyć kąt między:

(a) płaszczyznami $\pi_1 : x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : -2x + y - z + 5 = 0$;

(b) prostą $l : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ i płaszczyzną $\pi : x + y = 0$;

(c) prostymi $l_1 : x = -t,\ y = 1 + 2t,\ z = -3\ (t \in \mathbb{R})$, $l_2 : x = 0,\ y = -2s,\ z = 2 + s\ (s \in \mathbb{R})$.

43. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy[‡]:

(a)$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Przykładowe zestawy zadań z egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Nie wykonując dzielenia znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{98} + 17x^{95} + x^2 - 3x + 1$ przez trójmian $x^2 + 1$.

2. Obliczyć odległość punktu $P = (1 - 2, 4)$ od prostej $l : \begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + z = 4. \end{cases}$

3. Funkcję wymierną $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$ rozłożyć na ułamki proste.

[‡]Tylko dla Wydziału Chemicznego i Elektroniki

4. Rozwiązać równanie macierzowe $X^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Dla jakich wartości parametru p układ równań $\begin{cases} 2x + py - z = p, \\ \quad - y + pz = -1, \\ -2x \quad + z = 1 \end{cases}$ jest układem Cramera?

Dla $p = 1$ wyznaczyć x stosując wzory Cramera.

Zestaw B

1. Rozwiązać równanie macierzowe $\left(X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Wiadomo, że $x_1 = 1 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki zespolone tego wielomianu.

3. Obliczyć odległość punktu $Q = (-2, 0, 1)$ od płaszczyzny: $\pi : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = s - 2t, \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$.

4. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć niewiadomą y z układu równań: $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5, \\ \quad y - 2z = 5, \\ x \quad + z = -1. \end{cases}$

5. Napisać wzór de Moivre'a i następnie obliczyć $\left(i\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^{18}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

Zestaw C

1. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\left(i\sqrt{3} - 1\right)^{16}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Metodą bezwyznacznikową obliczyć macierz odwrotną do macierzy: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sprawdzić wynik wykonując odpowiednie mnożenie.

3. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-1, 0, 4)$, $B = (1, 2, 5)$, $C = (0, 3, -1)$ przesunięto o wektor $\boldsymbol{v} = (2, 3, -1)$. Obliczyć objętość graniastosłupa pochyłego powstałego w czasie przesunięcia.

4. Znaleźć obraz symetryczny punktu $P = (1, -2, 0)$ względem płaszczyzny $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$.

5. Funkcję wymierną $\dfrac{5x^3 + 3x + 4}{x^4 - 1}$ rozłożyć na ułamki proste.

Zestaw D

1. Rozwiązać równanie $(z - i)^3 + 1 = 0$. Pierwiastki zapisać w postaci algebraicznej.

2. Wyznaczyć macierz X z równania $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Znaleźć obraz symetryczny punktu $P = (1, -2, 0)$ względem prostej $l : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y + 3z - 4 = 0. \end{cases}$

4. Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających warunek: $\left| \dfrac{z - 4 - i}{z + 2} \right| \geqslant 1.$

5. Dane są punkty $A = (1, 2, -1)$, $B = (3, 1, 2)$. Na osi Oy znaleźć punkt C taki, aby pole trójkąta ABC było równe 10.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Funkcję wymierną $\dfrac{6x^2 - 5x + 2}{x^4 - 2x^3 + x^2}$ rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych.

2. Wyznaczyć macierz X z równania $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$

3. Znaleźć rzut prostopadły punktu $P = (-1, 0, 3)$ na prostą $l : \begin{cases} x + y = 3, \\ y - z = 2. \end{cases}$

4. Podać w postaci algebraicznej elementy pierwiastka $\sqrt[3]{(2 - 3i)^6}$.

5. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań $\begin{cases} 2x - y + 3z = -3, \\ x + y - z = 4, \\ -x + 3y + 2z = 3, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

Zestaw B

1. Podać wzór do wyznaczania pierwiastków n-tego stopnia liczby zespolonej z. Następnie obliczyć $\sqrt[3]{-8i}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x - 2y + 3z - 3t = -1, \\ 2x - 4y + 8z - 6t = 4. \end{cases}$

3. Znaleźć równanie prostej, która zawiera punkt $A = (3, 0, -1)$ i przecina prostą $l : x = 1 - t$, $y = 3 + 2t$, $z = 2 + t$ $(t \in \mathbb{R})$ pod kątem prostym.

4. Dane są punkty $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, 0, 6)$, $C = (1, 3, -1)$, $D = (2, p, 3)$. Dla jakiego p, objętość czworościanu $ABCD$ będzie równa 13?

5. Narysować zbiór liczb zespolonych, które spełniają nierówność $\left| z^2 + 4z + 4 \right| \geqslant |z + 2| \, |z - 3i|$.

Zestaw C

1. Narysować zbiór liczb zespolonych, które spełniają nierówność $|(1 - i)\, z - 2i| < |7 - i|$.

2. Funkcję wymierną $\dfrac{x^5 - x^3 + x + 1}{x^3 + x}$ przedstawić jako sumę wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych.

3. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (1, 2, -3)$ i prostopadłej do prostej
$$l : \begin{cases} x + y - z = 2, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

4. Obliczyć wysokość czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (3, 4, 5)$, $D = (-3, 4, -2)$ opuszczoną z wierzchołka D.

5. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(Y + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$

Zestaw D

1. Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = 2z^3 + 5z^2 + 6z + 2$ jest liczba wymierna. Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone tego wielomianu.

2. Rozwiązać równanie macierzowe $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

3. Podać interpretację pierwiastka n-tego stopnia liczby zespolonej z i obliczyć $\sqrt[4]{8\left(\sqrt{3}i - 1\right)}$. Wynik zapisać w postaci algebraicznej.

4. Trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$ mają współrzędne: $A = (1, 3, -1)$, $B = (0, 3, 4)$, $C = (2, -2, 5)$. Znaleźć współrzędne czwartego wierzchołka i wysokość równoległoboku opuszczoną z wierzchołka C.

5. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x - 2y + z - 3t = 2, \\ 2x + y - z - t = -3, \\ x - 7y + 2z - 8t = 1. \end{cases}$

Egzamin na ocenę celującą (styczeń 2016 r.) §

1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczono parami różne niezerowe liczby z_1, z_2, z_3, z_4. Korzystając tylko z cyrkla i linijki skonstruować wszystkie elementy zbioru $\sqrt[4]{z_1 z_2 z_3 z_4}$.

2. Znaleźć pierwiastki zespolone wielomianu $z^4 + 7iz^3 - 13z^2 + iz - 20$.

3. Wiersze od drugiego do ostatniego wyznacznika stopnia n ($n \geqslant 2$) wypełnić liczbami całkowitymi tak, aby po wpisaniu do pierwszego wiersza dowolnych liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, wartość wyznacznika była liczbą z pierwszego wiersza (odczytaną w układzie dziesiętnym).

4. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne ostrosłupa i wyznacza na nich kolejno odcinki o długościach $3, 2, 4, k$, licząc od wierzchołka. Metodami geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$ znaleźć k.

§ Zadania z egzaminów na ocenę celującą z lat 1994-2020 wrza z rozwiązaniami można znaleźć w książce „*Studencki konkurs matematyczny*".