Elementy analizy wektorowej

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zadań*

%

Całki krzywoliniowe niezorientowane

1. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną $\int\limits_{\Gamma} f\,dl$, jeżeli:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Γ – odcinek łączący punkty $(0,-1)$, $(2,0)$;

(b) $f(x,y) = xy$, Γ – część okręgu $x^2+y^2=R^2$ leżąca, w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych;

(c) $f(x,y,z) = x+y$, Γ – ćwiartka okręgu $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ y=x, \end{cases}$ położona w pierwszym oktancie układu współrzędnych;

(d) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2$, Γ – okrąg $x^2+y^2=9$;

(e) $f(x,y) = xy$, Γ – część okręgu $x^2+y^2-2y=0$, położona w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych;

(f) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$, Γ – łuk spirali Archimedesa $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Obliczyć długości łuków:

(a) $\Gamma:\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, gdzie $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ oraz $a>0$;

(b) Γ – jeden zwój linii śrubowej o skoku h nawiniętej, na walec o promieniu R;

(c) $\Gamma:\ x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ z=e^{-t}$, gdzie $0\leqslant t<\infty$.

3. Obliczyć pole części powierzchni bocznej walca $x^2+y^2=1$ ograniczonej płaszczyznami $z=-x,\ z=5+y$.

4. Obliczyć masy podanych łuków o wskazanych gęstościach liniowych:

(a) $\Gamma:\ x=a\cos t,\ y=a\sin t$, gdzie $t\in[0,2\pi]$, $\lambda(x,y)=|y|$ oraz $a>0$;

(b) $\Gamma:\ x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ z=bt$, gdzie $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $\lambda(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ oraz $r,b>0$;

(c) $\Gamma:\ x=t,\ y=\dfrac{t^2}{2},\ z=\dfrac{t^3}{3}$, gdzie $0\leqslant t\leqslant 1$, $\lambda(x,y,z)=\sqrt{2y}$.

*Zadania zaczerpnięto z książki autorów: *Elementy analizy wektorowej. Teoria, przykłady, zadania*

5. Wyznaczyć współrzędne środków masy łuków jednorodnych:

(a) linia łańcuchowa $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, gdzie $-a \leqslant x \leqslant a$;

(b) linia śrubowa $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = bt$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(c) brzeg trójkąta sferycznego $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, gdzie $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

(d) ćwiartka okręgu o promieniu R;

(e) półokrąg o promieniu R wraz ze średnicą;

(f) krzywa $x^2 + y^2 = 1$, $x + 2y + 3z = 12$;

(g) łuk cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$;

(h) łuk okręgu $x^2 + y^2 = 1$, położony powyżej prostej $y = x$;

(i) łuk asteroidy opisany równaniem $x = 6\cos^3 t$, $y = 6\sin^3 t$, gdzie $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Obliczyć momenty bezwładności podanych łuków jednorodnych o masie M względem wskazanych osi:

(a) brzeg kwadratu o boku a, względem przekątnej;

(b) odcinek AB, gdzie $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 5, 4)$, względem osi Oz;

(c) linia śrubowa $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, względem osi Oz.

Całki krzywoliniowe zorientowane

---

7. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane z podanych pól wektorowych po wskazanych łukach (zorientowanych zgodnie z parametryzacją):

(a) $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(x^2 + y^2, xy\right)$, $\Gamma:\ x = t,\ y = e^t$, gdzie $t \in [0, 1]$;

(b) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, $\Gamma:\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$;

(c) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, Γ – odcinek AB, gdzie $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, 2, 3)$;

(d) $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(\frac{y - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, 2\sqrt{x}\right)$, Γ – wykres funkcji $y = \log_2 x$, przebiegany od punktu $A = (1, 0)$ do $B = (4, 2)$;

(e) $\boldsymbol{F}(x, y) = (y, x)$, Γ – łamana o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (4, 4)$, $D = (0, 4)$, przebiegana w kolejności A, B, C, D;

(f) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$, Γ – odcinek o początku $A = (2, -1, 0)$ i końcu $B = (0, 1, 3)$;

(g) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(y + 1, x - 2y, 3z^2\right)$, Γ – zwój linii śrubowej $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{\pi}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$;

(h) $\boldsymbol{F}(x, y) = (x\cos y, y\sin x)$, Γ – odcinek o początku $P = (0, 0)$ i końcu $K = (\pi, 2\pi)$.

8. Obliczyć całki krzywoliniowe z pól wektorowych $\boldsymbol{F}$ po łukach Γ (orientacja łuku jest zgodna ze wzrostem zmiennej):

(a) $\boldsymbol{F}(x,y)=(x-y,x+y)$, $\Gamma:\ y=\sin x$, gdzie $0\leqslant x\leqslant\pi$;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y)=(\ln x,\ln y)$, $\Gamma:\ y=x^2$, gdzie $1\leqslant x\leqslant e$.

9. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane po wskazanych łukach zamkniętych:

(a) $\oint\limits_\Gamma xy\,dx+x^2\,dy$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(1,2)$, $C=(-1,4)$, zorientowanym dodatnio;

(b) $\oint\limits_\Gamma x^2y\,dx+xy(y+1)\,dy$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2+2y=0$, zorientowanym dodatnio;

(c) $\oint\limits_\Gamma(3x+5z)\,dx+(x+4y)\,dy+(6x-z)\,dz$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(2,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,2)$, obieganym w kolejności $ABCA$.

10. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane z potencjalnych pól wektorowych $\boldsymbol{F}$ po dowolnym łuku o początku A i końcu B:

(a) $\boldsymbol{F}(x,y)=(x,y)$, $A=(1,1)$, $B=(-1,-2)$;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y)=(\sin x\cos y,\cos x\sin y)$, $A=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $B=(\pi,\pi)$;

(c) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(x^2-2yz,y^2-2xz,z^2-2xy\right)$, $A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$;

(d) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(2xyz,x^2z,x^2y+1\right)$, $A=(1,2,3)$, $B=(3,2,1)$.

11. Sprawdzić, że całki krzywoliniowe nie zależą od kształtu krzywej całkowania i następnie obliczyć je:

(a) $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x\cos y\,dx-e^x\sin y\,dy$;

(b) $\displaystyle\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y}{x^2}\,dx-\frac{1}{x}\,dy$, wzdłuż łuku nie przechodzącego przez oś Oy;

(c) $\displaystyle\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,4)}\left(x^2-2yz\right)\,dx+\left(y^2-2xz\right)\,dy+\left(z^2-2xy\right)\,dz$.

12. Wykorzystując twierdzenie Greena obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane. Sprawdzić wynik obliczając te całki bezpośrednio:

(a) $\oint\limits_\Gamma\left(1-x^2\right)y\,dx+x\left(1+y^2\right)\,dy$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2=R^2$, zorientowanym dodatnio;

(b) $\oint\limits_\Gamma\left(x^2+y\right)\,dx+\left(x+y^2\right)\,dy$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(1,1)$, $B=(3,2)$, $C=(2,5)$, zorientowanym dodatnio;

(c) $\oint\limits_\Gamma e^x(1-\cos y)\,dx-e^x(y-\sin y)\,dy$, gdzie Γ jest brzegiem obszaru $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\sin x$, zorientowanym dodatnio;

(d) $\oint\limits_\Gamma(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$, gdzie Γ jest krzywą zamkniętą złożoną z łuku paraboli $y=x^2$ między punktami $(0,0)$ i $(1,1)$ oraz z odcinka łączącego te punkty, zorientowaną dodatnio;

(e) $\oint\limits_{\Gamma} xy\,dx + \left(x^2 - y^2\right)\,dy$, gdzie Γ jest brzegiem trójkątem o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(1,2)$, zorientowanym dodatnio;

(f) $\oint\limits_{\Gamma} x^2y\,dx - y^2x\,dy$, gdzie Γ jest brzegiem ćwiartki koła $x^2+y^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, dodatnio zorientowanym;

(g) $\oint\limits_{\Gamma} x^2y\,dx - xy^2\,dy$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2=2$, dodatnio zorientowanym.

(h) $\oint\limits_{\Gamma} (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2=4x$, dodatnio zorientowanym.

13. Za pomocą całki krzywoliniowej zorientowanej obliczyć pola obszarów ograniczonych łukami zamkniętymi:

(a) elipsa $\Gamma:\ x = a\cos t,\ y = b\sin t$, gdzie $t \in [0,2\pi]$;

(b) kardioida $\Gamma:\ x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$, gdzie $t \in [0,2\pi]$;

(c) asteroida $\Gamma:\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$, gdzie $t \in [0,2\pi]$.

14. Obliczyć pracę w polu wektorowym $\boldsymbol{F}$ podczas ruchu po łuku zorientowanym Γ, jeżeli:

(a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy, x^2)$, Γ – dowolny łuk łączący punkty $A=(1,0), B=(0,3)$;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xy, y+z, z)$, $\Gamma:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$, od punktu $A=(1,0,0)$ do punktu $B=(-1,0,\pi)$;

(c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-x,-y,-z)$, Γ – dowolny łuk łączący punkt $A=(x_1,y_1,z_1)$ należący do sfery $x^2+y^2+z^2=r^2$, z punktem $B=(x_2,y_2,z_2)$ należącym do sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$;

(d) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x+y, x^2-y^2\right)$, Γ – prawy półokrąg łączący punkty $A=(3,0)$ i $B=(3,4)$;

(e) $\boldsymbol{F}(x,y) = (2x-y, x-2y)$, Γ – wykres funkcji $y=e^x$, od punktu $(0,1)$ do $(1,e)$;

(f) $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{(y,x)}{x^2+y^2}$, Γ – łuk okręgu $x^2+y^2=4$, od punktu $P=(2,0)$ do $K=(0,2)$.

Całki powierzchniowe niezorientowane

---

15. Obliczyć całki powierzchniowe niezorientowane po wskazanych płatach:

(a) $\iint\limits_{\Sigma} \left(x^2+y^2\right)\,dS$, gdzie Σ jest sferą $x^2+y^2+z^2=R^2$;

(b) $\iint\limits_{\Sigma} (x+y+z)\,dS$, gdzie Σ jest częścią płaszczyzny $x+y+z=1$, położoną w pierwszym oktancie układu współrzędnych;

(c) $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, gdzie Σ jest stożkiem $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z \leqslant 3$;

(d) $\iint\limits_{\Sigma} \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dS$, gdzie Σ jest płatem opisanym przez warunki $y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\,dS$, gdzie Σ jest półsferą o równaniu $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

(f) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2}$, gdzie Σ jest walcem $x^2+y^2=4$, ograniczonym płaszczyznami $z=1$, $z=2$.

16. Obliczyć pola płatów:

(a) Σ – część płaszczyzny $2x+3y+z-6=0$ wycięta przez walec $x^2+y^2=4$;

(b) Σ – część paraboloidy $z=x^2+y^2$ odcięta przez płaszczyznę $z=h$ $(h>0)$;

(c) Σ – powierzchnia boczna stożka ściętego o promieniach podstaw r,R i wysokości h $(r<R)$;

(d*) Σ – fragment powierzchni Ziemi zawarty między południkami 60° i 80° **W** oraz równoleżnikami 45° i 60° **N**. Przyjąć promień Ziemi $R=6370$ km.

17. Obliczyć masy płatów o wskazanych gęstościach powierzchniowych:

(a) $z=x+y$, gdzie $x\in[1,2]$, $y\in[2,3]$, $\sigma(x,y,z)=xyz$;

(b) półsfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $\sigma(x,y,z)=z$;

(c) stożek $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\leqslant 1$, $\sigma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(d) $z=2-x-y$, $x\geqslant 0$, gdzie $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $\sigma(x,y,z)=xyz$;

(e) część walca $y^2+z^2=1$ ograniczona płaszczyznami $x=0$, $x=2$, $y=0$, o gęstości $\sigma(x,y,z)=y^2$.

18. Znaleźć położenia środków masy jednorodnych płatów materialnych:

(a) $x+y+z=4, \quad x^2+y^2\leqslant 1$;

(b) $z=2\sqrt{x^2+y^2}, \quad 2\leqslant z\leqslant 6$;

(c) $z=x^2+y^2, \quad z\leqslant 1$;

(d) sześcienne pudełko o krawędzi a (otwarte od góry);

(e) powierzchnia boczna stożka ściętego o promieniach podstaw r,R i wysokości H;

(f) trójkąt o wierzchołkach $A=(0,0,0)$, $B=(1,2,-3)$, $C=(2,-2,9)$;

(g) powierzchnia zamkniętego stożka o promieniu podstawy R i wysokości H;

(h) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, gdzie $x\geqslant 0$, $z\leqslant 3$.

19. Obliczyć momenty bezwładności płatów materialnych względem wskazanych osi:

(a) jednorodna sfera o promieniu R i masie M, względem średnicy;

(b) paraboloida $z=x^2+y^2$, gdzie $z\leqslant h$, o gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$, względem osi Oz;

(c) jednorodna powierzchnia ośmiościanu $|x|+|y|+|z|=a$ o masie M, względem osi Oz;

(d) jednorodna powierzchnia boczna walca $x^2+y^2=R^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$, o masie M, względem osi Ox;

Całki powierzchniowe zorientowane i elementy analizy wektorowej

20. Obliczyć całki powierzchniowe zorientowane:

(a) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xy\,dydz + yz\,dzdx + xz\,dxdy,$

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną powierzchni czworościanu: $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

(b) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xy^2\,dydz + yz^2\,dzdx + zx^2\,dxdy,$

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną powierzchni sześcianu $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$;

(c) $\displaystyle\iint_{\Sigma} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy;$

gdzie Σ jest zewnetrzną stroną powierzchni stożka $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1$;

(d) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} z^2\,dxdy,$

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

(e) $\displaystyle\iint_{\Sigma} xyz\,dxdy,$

gdzie Σ jest częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ położoną w pierwszym oktancie układu współrzędnych, zorientowaną na zewnątrz.

21. Uzasadnić wzory:

(a) $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,U) = \boldsymbol{O}$, gdzie U jest funkcją mającą ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$;

(b) $\mathbf{rot}\,(f\boldsymbol{c}) = \mathbf{grad}\,f \times \boldsymbol{c}$, gdzie f jest funkcją mającą pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$, a $\boldsymbol{c}$ – ustalonym wektorem;

(c) $\mathbf{rot}\,(f\boldsymbol{F}) = \mathbf{grad}\,f \times \boldsymbol{F} + f\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F})$, gdzie funkcja f oraz pole wektorowe $\boldsymbol{F}$ są różniczkowalne w sposób ciągły na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$.

22. Uzasadnić wzory:

(a) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \circ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \circ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{G}$, gdzie pola wektorowe $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{G}$ są różniczkowalne na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$;

(b) $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}) = 0$, gdzie pole wektorowe $\boldsymbol{F}$ ma składowe dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$.

23. Przy pomocy twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego obliczyć całki powierzchniowe zorientowane. Sprawdzić otrzymane wyniki wyznaczając te całki bezpośrednio:

(a) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} 2xy\,dydz - y^2\,dzdx + 2z\,dxdy,$

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną brzegu obszaru $V:\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

(b) $\oiint\limits_{\Sigma} (x+z)\,dydz + (x+y)\,dzdx + (y+z)\,dxdy$,

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną brzegu obszaru $V:\ x^2+y^2 \leqslant R^2,\ x+y+z \leqslant 2R,\ z \geqslant 0\ \ (R>0)$;

(c) $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy$,

gdzie Σ jest wewnętrzną stroną powierzchni walca $V: x^2+y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H$;

(d) $\oiint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$,

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną walca $x^2+z^2 \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 3$;

(e) $\oiint\limits_{\Sigma} \left(x^2+yz\right)\,dydz + \left(xz+y^2\right)\,dzdx + xy^2\,dxdy$,

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną walca $x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

(f) $\oiint\limits_{\Sigma} (x+y)^2\ dydz + (y+z)^2\ dzdx + (z+x)^2\ dxdy$,

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną sfery $x^2+y^2+z^2=4$.

(g) $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^2\,dxdy$,

gdzie Σ jest zewnętrzna stroną powierzchni walca $x^2+y^2 \leqslant 9,\ 0 \leqslant z \leqslant 2$;

(h) $\oiint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$,

gdzie płat Σ jest zewnętrzną stroną sfery $x^2+y^2+z^2=4$;

(i) $\oiint\limits_{\Sigma} xz\,dxdy + xy\,dydz + yz\,dxdz$,

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną czworościanu $x+y+z \leqslant 3,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$.

24. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane. Sprawdzić otrzymane wyniki wyznaczając te całki bezpośrednio:

(a) $\oint\limits_{\Gamma} x^2y^3\ dx +\ dy + z\ dz$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2=R^2,\ z=0$, zorientowanym dodatnio;

(b) $\oint\limits_{\Gamma} x\ dx + (x+y)\ dy + (x+y+z)\ dz$, gdzie $\Gamma:\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\sin t+\cos t$ dla $t \in [0,2\pi]$;

(c) $\oint\limits_{\Gamma} (y+z)\ \ dx + (z+x)\ \ dy + (x+y)\ \ dz$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x=y$;

(d) $\oint\limits_{\Gamma} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0$;

(e) $\oint\limits_{\Gamma} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, gdzie Γ jest elipsą $x^2+y^2=4,\ x-z=0$;

(f) $\oint\limits_{\Gamma} \left(y^2+z^2\right)\ dx + \left(x^2+z^2\right)\ dy + \left(x^2+y^2\right)\ dz$, gdzie Γ jest łamaną zamkniętą o wierzchołkach $A=(0,0,0),\ B=(1,1,0),\ C=(1,1,1)$, przebieganą w kolejności $ABCA$.

25. Obliczyć strumienie pól wektorowych $\boldsymbol{F}$ przez płaty Σ:

(a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{3}, z^2-x^2, \dfrac{2z}{3}\right)$,

gdzie Σ jest powierzchnią zewnętrzną walca $x^2+y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H$;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$,
gdzie Σ jest powierzchnią zewnętrzną sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$;

(c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (5x+z, x-3y, 4y-2z)$,

gdzie Σ jest górną częścią płaszczyzny $x+y+z=2$, odciętej płaszczyznami układu współrzędnych;

(d) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,0,z)$, gdzie Σ jest zewnętrzną stroną walca o parametryzacji $(\cos u, \sin u, v)$ dla $u \in [0,2\pi]$, $v \in [-1,1]$;

(e) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)$; gdzie Σ jest zewnętrzną powierzchnią stożka $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 4$;

(f) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)$; gdzie Σ jest zewnętrzną powierzchnią czworościanu $x+y+z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

26. Obliczyć cyrkulacje pól wektorowych $\boldsymbol{F}$ wzdłuż wskazanych łuków zamkniętych zorientowanych Γ:

(a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(y^2, (x+y)^2, z\right)$, Γ – łamana zamknięta łącząca punkty $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$ w kolejności $ABCA$;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y, 1-x, -z)$, Γ – łuk zamknięty otrzymany w wyniku przecięcia powierzchni walca $(x-1)^2+y^2=1$ i półsfery $(x-2)^2+y^2+z^2=4\,(z \geqslant 0)$, przebiegany w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara.