Wstęp do analizy i algebry (2018/2019)

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zadań*

1. Czy podane sformułowania są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:
(a) „Gniezno było stolicą Polski”; (b) „Liczba $12^{1000}+7$ jest podzielna przez 3”;
(c) „$a^2+b^2=c^2$”; (d) „Piotr nie jest moim bratem”;
(e) „W 2016 r. zadania maturalne z matematyki były trudne”;
(f) „Czy jadłeś dzisiaj obiad?”; (g) „$\Delta = b^2 - 4ac$”.

2. Ocenić prawdziwość zdań:
(a) „nieprawda, że funkcja $f(x)=x^2$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$”;
(b) „$(-1)^{44}=-1$ lub 2008 jest liczbą parzystą”;
(c) „funkcja $g(x)=\sin x$ jest okresowa, a funkcja $f(x)=3^x$ nieparzysta”;
(d) „jeżeli Piotr jest synem Tadeusza, to Tadeusz jest ojcem Piotra”;
(e) „liczba 123456789 jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9” .

3. Zbadać, czy podane formuły rachunku zdań są prawami logicznymi:
(a) $\sim (p \vee q) \Rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$; (b) $p \Rightarrow [(q \wedge \sim q) \Rightarrow r]$;
(c) $(p \Rightarrow q) \iff [(\sim p) \vee q]$; (d) $[p \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \wedge q]$.

4. Podane stwierdzenia zapisać za pomocą kwantyfikatorów i funkcji zdaniowych:
(a) każda liczba rzeczywista jest dodatnia;
(b) równanie $f(x)=1$ ma rozwiązanie rzeczywiste;
(c) zbiór liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry;
(d) zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma element największy;
(e) w zbiorze $B \subset \mathbb{R}$ nie ma elementu najmniejszego;
(f) każda liczba rzeczywista jest parzysta;
(g) równanie $x^2+x+1=0$ nie ma rozwiązania rzeczywistego;
(h) równanie $x^5+x=3$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste.

5. Zbadać, czy podane funkcje zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

(a) $\bigvee\limits_{x\in\mathbb{R}} \sin x = \frac{1}{2}$; (b) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2+4x+3>0$; (c) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} \bigvee\limits_{y\in\mathbb{R}} x^2-y^2=0$;
(d) $\bigvee\limits_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} xy=0$; (e) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} |x^n|=|x|^n$; (f) $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigvee\limits_{x,y,z\in\mathbb{R}} x^n+y^n=z^n$.

6. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:
(a) $(2x+y)^4$; (b) $(c-1)^7$; (c) $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^5$; (d) $(\sqrt{u}+\sqrt[4]{v})^8$.

7. W rozwinięciu dwumianowym wyrażenia:
(a) $\left(x^5-\frac{2}{x^3}\right)^{12}$ znaleźć współczynnik przy x^{20}; (b) $\left(3\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{a}\right)^{18}$ znaleźć współczynnik przy a^{12}.

---

*Zadania zaczerpnięto z książki autorów: *Wstęp do analizy i algebry. Teoria, przykłady, zadania* Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014.

8. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości:

(a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$; (b) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

(c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (d) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

9. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba:
(a) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6; (b) $13^n + 11$ jest podzielna przez 12;
(c) $5^n - 1$ jest podzielna przez 4; (d) $9^n + 3$ jest podzielna przez 4.

10. (a) Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

(b) Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność $2^n > n^2$.

11. Uzasadnić, że ciąg:

(a) $a_n = 2n - n^2$ jest malejący; (b) $b_n = n + \dfrac{1}{n}$ jest rosnący.

12. (a) W ciągu arytmetycznym pierwszym wyrazem jest $a_1 = 1/2$, a różnicą $r = 3/2$. Którym wyrazem ciągu jest 23?

(b) Obliczyć sumę $2 + 5 + 8 + \ldots + 1001$, w której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

(c) Kąty w trójkącie tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym najmniejszy kąt jest cztery razy mniejszy od największego. Znaleźć te kąty.

13. (a) Pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego jest $a_1 = 2$, a ilorazem $q = 3$. Jaką najmniejszą liczbę kolejnych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby ich suma była większa od 2000?

(b) Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym. Znamy wartości sum $S_2 = 36$ oraz $S_3 = 42$. Wyznaczyć S_4.

(c) Liczby $5, x, y, 10$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znaleźć x, y.

(d) Rozwiązać równanie

$$\frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots = 4 - 3x,$$

w którym lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

14. Liczby $a, 9, c$ tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby a, 15, c ciąg geometryczny. Znaleźć a i c.

15. (a) Wyrazić objętość V sześcianu, jako funkcję pola powierzchni P.

(b) Wyrazić pole P koła, jako funkcję obwodu O.

16. Określić dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \sqrt{3x+1}$; (b) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$; (c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;

(d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$; (e) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{x-1}$; (f) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x-2}$.

17. Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są parzyste lub nieparzyste:

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$; (b) $f(x) = |x^3 + x|$; (c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 2x}$.

18. Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = 2x - 1$, $\mathbb{R}$; (b) $f(x) = x^2 - 2x$, $(-\infty, 1]$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $(1, \infty)$; (d) $f(x) = 2\sqrt{x+1}$, $[-1, \infty)$.

19. Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz ich dziedziny, jeżeli:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$; (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{2x}{x-4}$.

20. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

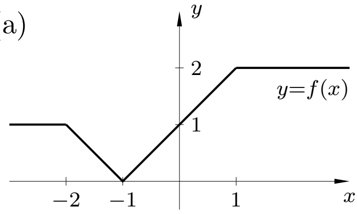
(a) $f(x) = 1 - 2x,\ \mathbb{R}$; (b) $f(x) = \sqrt{x+1},\ [-1, \infty)$.

21. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

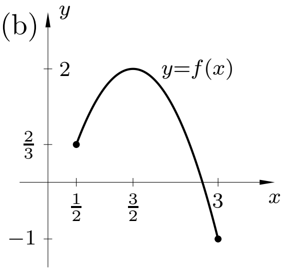
(a) $f(x) = 1 - 3x$; (b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$; (c) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$.

22. Wykres funkcji f przedstawiono poniżej:

(a)



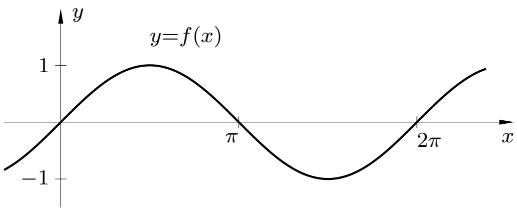
(b)



Naszkicować wykresy funkcji:

(i) $f(x) + 1$; (ii) $f(-x) - 1$; (iii) $f(x+1)$; (iv) $-f(x) + 1$; (v) $-f(x-1)$; (vi) $f(1-x) - 1$.
W punkcie (b) zwrócić uwagę na zmianę dziedziny funkcji.

23. Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono poniżej:

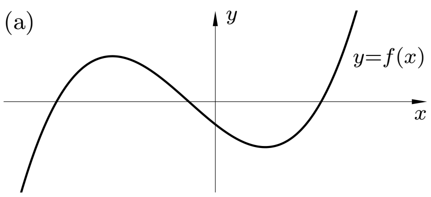


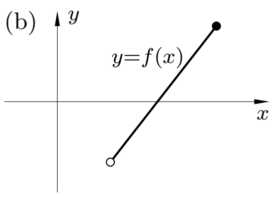
Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $y = f(\pi x)$; (b) $y = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$; (c) $y = 2f(x)$;

(d) $y = \dfrac{1}{3}f(x)$; (e) $y = 2f(2x)$; (f) $y = \dfrac{3}{2}f\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

24. Korzystając z wykresu funkcji f przedstawionego na rysunku,





naszkicować wykresy funkcji:
(i) $f(|x|)$; (ii) $|f(x)|$; (iii) $|f(|x|)|$.
W punkcie (b) zwrócić uwagę na dziedzinę funkcji.

25. Podane wyrażenia zapisać bez symbolu wartości bezwzględnej:

(a) $|x-3|$; (b) $|8-2x|$; (c) $||x|+2|$;

(d) $|1-|x||$; (e) $2x + |2-x| - |x+1|$, jeżeli $x \leqslant -1$; (f) $\left|\dfrac{x(x+1)}{x-2}\right|$, jeżeli $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

26. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej rozwiązać nierówności:

(a) $|x-5| > 2$; (b) $|x+1| \leqslant 3$; (c) $|2-3x| < 1$.

27. Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = |x-3| - 2$; (b) $y = |6-3x|$; (c) $y = ||x|-2|$.

28. Sprowadzić do postaci kanonicznej trójmiany kwadratowe:

(a) $x^2 + 4x + 5$; (b) $4x^2 - x$; (c) $-3x^2 + 3x - 1$.

29. Narysować wykresy funkcji kwadratowych:
(a) $y = x^2 - 2x + 3$; (b) $y = 2x^2 + x - 3$; (c) $y = 0.2x^2 + 0.5x$.

30. Sprowadzić do postaci iloczynowej (jeżeli istnieje) funkcje kwadratowe i narysować ich wykresy:

(a) $f(x) = -x^2 + x$; (b) $f(x) = 2x^2 + 1$; (c) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$;

(d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; (e) $f(x) = -2x^2 - 2x + \frac{3}{2}$; (f) $f(x) = -x^2 - 3x - \frac{9}{4}$;

(g) $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{2}$; (h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.

31. Rozwiązać równania z wartością bezwzględną:

(a) $x + 3 = |2x - 3|$ (b) $|x| + 1 = \frac{1}{2}|x - 1| + 2$; (c) $|3 - x| - |x - 2| = 1$; (d) $|x - 1| + 2 = \frac{x}{3}$.

32. Rozwiązać nierówności, a zbiór rozwiązań zaznaczyć na osi liczbowej:
(a) $10x - 7 > -2x + 17$; (b) $2x - 1 \geqslant 5x - 7$;

(c) $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{2} + \dfrac{3x - 2}{3} < \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1$; (d) $-11 \leqslant 3(x - 1) - 2 \leqslant 16$.

33. Rozwiązać nierówności z wartością bezwzględną:
(a) $|x + 2| + |x - 3| \leqslant 5$; (b) $|x - 1| + 5x > 11$; (c) $2|x| - |x - 3| > 6$; (d) $x + 2 + |x - 3| \geqslant 0$.

34. Rozwiązać równania:

(a) $x^2 + 5x + 4 = 0$; (b) $8x^2 - 11x + 3 = 0$; (c) $2x^2 + x - 15 = 0$;

(d) $12x^2 - 7x + 1 = 0$; (e) $x^2 + 0.1x - 0.02 = 0$; (f) $4 - 3x^2 = 0$.

35. Rozwiązać nierówności:
(a) $(2 - x)(x + 3) \geqslant 0$; (b) $x(x - 1) < 2(x + 2)$;

(c) $8 \leqslant x^2 + 2x$; (d) $(2x - 3)(x + 1) \leqslant (x + 1.5)^2 - 9.25$;

(e) $4x(x + 2) \geqslant 21$; (f) $(x + 1)(2x - 3) > (2x + 3)(3x - 4) + 12$;

(g) $(2x + 1)(x - 3) \leqslant (x - 2)(x + 1)$; (h) $(5 - 2x)^2 > (2x - 1)^2 - (x + 5)^2 + 40$.

36. Wyznaczyć iloraz oraz resztę z dzielenia wielomianu $U(x)$ przez $V(x)$:
(a) $U(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ V(x) = x^2 - 5x + 6$;

(b) $U(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 2,\ V(x) = x^2 + 3$;

(c) $U(x) = x^3 - 27,\ V(x) = x^2 + x + 1$;

(d) $U(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + 2x - 4,\ V(x) = x^3 + 3x^2 + 2$;

(e) $U(x) = -4x^5 + 5x^2 + 8,\ V(x) = x^2 + 1$.

37. Podane liczby są pierwiastkami wskazanych wielomianów, wyznaczyć pozostałe pierwiastki:

(a) $x_1 = \frac{1}{2}$, $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 2$; (b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;

(c) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $W(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$; (d) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $W(x) = x^4 + \frac{11}{12}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}$.

38. Wyznaczyć krotności pierwiastków wielomianów:

(a) $x_0 = -2,\ W(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$;

(b) $x_0 = -3,\ W(x) = \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + 1$;

(c) $x_0 = \frac{2}{3},\ W(x) = 9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4$.

39. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki całkowite wielomianów:

(a) $x^3 - 4x^2 + x + 6$; (b) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$; (c) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$;

(d) $x^5 - 7x^3 - 8x^2 + 2x + 12$; (e) $x^8 - x^7 - 2x^6 - x - 2$; (f) $x^6 - x^5 - 8x^4 + 10x^3 - 11x^2 - 9x + 18$.

40. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 3x - 1$; (b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

(c) $W(x) = 4x^4 - 4x^3 + 7x^2 + x - 2$; (d) $W(x) = x^5 + \frac{4}{5}x^4 - x - \frac{4}{5}$.

41. Rozwiązać równania:

(a) $x^3 + 2x^2 + x = 0$; (b) $x^3 + x^2 + 2x = 0$; (c) $x^4 - 16 = 0$;

(d) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$; (e) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0$; (f) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$;

(g) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; (h) $x^7 + 2x^6 - 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 6x^2 - x - 2 = 0$.

42. Rozwiązać nierówności:

(a) $(x-2)\left(x^2 + 2x - 3\right) > 0$; (b) $\left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 + x - 6\right) \leqslant 0$; (c) $\left(4x^2 - 25\right)^2 - (2x+5)^2 > 0$;

(d) $x^3 - 4x^2 + 4x < 0$; (e) $x^4 + 2x^3 - x - 2 \geqslant 0$; (f) $x^4(x-1)^3(x+2)^2(x-2) \leqslant 0$;

(g) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 \leqslant 0$; (h) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 > 0$; (i) $x^5 - 9x^3 + 8x \geqslant 0$.

43. Rozwiązać równania:

(a) $\dfrac{4x-6}{2x^2 - x + 4} = 0$; (b) $\dfrac{3}{4x-6} + \dfrac{2}{2x-3} = \dfrac{1}{5}$; (c) $\dfrac{9x}{3x-1} = \dfrac{3}{3x+1} + 2$;

(d) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{21}{x^2 - x - 2}$; (e) $\dfrac{2x-1}{x} = \dfrac{3}{x+1} + 1$; (f) $\dfrac{x-4}{x-2} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x-21}{x^2 + x - 6}$;

(g) $\dfrac{x^2-1}{x^3-1} = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$; (h) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x+3} = \dfrac{x-2}{x^2 + 2x - 3}$; (i) $x^2 - 4x - \dfrac{15}{x^2 - 4x} = 2$.

44. Rozwiązać nierówności:

(a) $\dfrac{x^2 - 3x}{x+3} < 0$; (b) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} \geqslant 0$; (c) $2 + \dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x}$;

(d) $\dfrac{x^2 + 5x}{x-3} > x$; (e) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0$; (f) $\dfrac{-x^2 + 2x + 4}{x-2} \leqslant 1$;

(g) $\dfrac{x^3 - x + 6}{x^2} \geqslant 0$; (h) $\dfrac{10x+1}{2x+2} - \dfrac{8x^2 - 6x - 8}{4(x+1)^2} \leqslant 3$; (i) $\dfrac{x^2+1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{5-x}{x^2-1}$.

45. Kąty wyrażone w stopniach zapisać w radianach:

(a) $10°$; (b) $24°$; (c) $45°$; (d) $135°$; (e) $350°$; (f) $1080°$.

46. Kąty wyrażone w radianach zapisać w stopniach:

(a) 1; (b) $\dfrac{\pi}{24}$; (c) $\dfrac{7\pi}{12}$; (d) $\dfrac{4\pi}{3}$; (e) $\dfrac{35\pi}{36}$; (f) $\dfrac{7\pi}{4}$.

47. Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych:

(a) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$; (b) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$; (c) $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3}$; (d) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

48. Korzystając ze wzorów redukcyjnych podane wyrażenia zapisać w postaci funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α:

(a) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; (b) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + \alpha\right)$; (c) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; (d) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

49. Podane wyrażenia zapisać w postaci funkcji trygonometrycznych kąta ostrego:

(a) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; (b) $\cos\frac{9}{2}\pi$; (c) $\operatorname{tg}\left(-\frac{95}{3}\pi\right)$; (d) $\operatorname{ctg}\frac{14}{9}\pi$.

50. Uzasadnić tożsamości:

(a) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$; (b) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; (c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$;

(d) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$; (e) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$; (f) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

51. W przedziale $[-\pi,\pi]$ naszkicować wykresy funkcji:

(a) $y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; (b) $y=\sin x-\left|\frac{1}{2}\sin x\right|$; (c) $y=1+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(d) $y=\operatorname{tg}x+|\operatorname{tg}x|$; (e) $y=\sin x+\cos x$; (f) $y=|\operatorname{tg}x|\operatorname{ctg}x$.

52. Rozwiązać równania:

(a) $\sin x=-\frac{1}{2}$; (b) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\operatorname{tg}x=1$; (d) $\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

53. Rozwiązać równania:

(a) $\sin x=-\sin 2x$; (b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; (c) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; (d) $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}x$.

54. Rozwiązać równania:

(a) $\cos 4x=\sin\frac{x}{2}$; (b) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; (c) $\operatorname{ctg}2x=\operatorname{tg}2x$; (d) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

55. Rozwiązać równania:

(a) $\sin^2 x+\cos x\sin x=0$; (b) $\sin x-2=\cos 2x$; (c) $\cos 4x=2-3\sin 2x$;

(d) $\sin^3 x-4\sin^2 x-\sin x=-4$; (e) $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+1=0$; (f) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$;

(g) $\sin 3x-\sin x=\sin 2x$; (h) $\cos 5x-\cos x=\sin 3x$.

56. Rozwiązać nierówności:

(a) $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$; (c) $\operatorname{tg}x<-1$; (d) $\operatorname{ctg}x>-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

57. Rozwiązać nierówności we wskazanych przedziałach:

(a) $2\sin^2 x\leqslant 1$, $[0,2\pi]$; (b) $4\cos^2 x\geqslant 3$, $[-\pi,\pi]$; (c) $\operatorname{tg}^2 x>1$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; (d) $\operatorname{ctg}^2 x<3$, $(0,\pi)$.

58. Rozwiązać nierówności:

(a) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\geqslant\sqrt{3}$; (b) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)<-1$; (c) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}\right)>-1$; (d) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$.

59. Rozwiązać nierówności w ich dziedzinach lub wskazanych zbiorach:

(a) $\cos x\leqslant\sin\frac{x}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; (b) $\cos x+\sin x\geqslant\sqrt{\frac{3}{2}}$; (c) $\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\operatorname{ctg}x}<0$; (d) $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\leqslant 1$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

60. Wyznaczyć dziedziny funkcji:

(a) $y=\frac{1}{x+2}$; (b) $y=1+\frac{1}{x^2}$; (c) $y=\sqrt{x-2}$;

(d) $y=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}}-1$; (e) $y=\sqrt{(x-3)^3}-3$; (f) $y=2\sqrt[5]{(x+1)^3}-2$.

61. Rozwiązać równania z pierwiastkami:

(a) $x-3=\sqrt{9-x}$; (b) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$; (c) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=12$.

62. Rozwiązać nierówności z pierwiastkami:

(a) $2x-1 \geqslant \sqrt{x}$; (b) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}<3$; (c) $\sqrt{25-x^2} \leqslant x+3$.

63. Rozwiązać równania:

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}=8$; (b) $2 \cdot 4^{2x}-3 \cdot 4^x=-1$; (c) $\left(\sqrt{5}\right)^x-\sqrt[3]{25}=0$;

(d) $9^x+3^{x+1}=4$; (e) $5^{\frac{8-3x}{x}}=5^{\frac{2x}{2-x}} \cdot 5^{\frac{x+5}{3-x}}$; (f) $\frac{1}{3^x-4}+3^{1-x}=0$;

(g) $4^{\sqrt{x-1}}+16=10 \cdot 2^{\sqrt{x-1}}$; (h) $8^x+18^x-2 \cdot 27^x=0$; (i) $2+3^{\cos^2 x}=3^{\sin^2 x}$.

64. Rozwiązać nierówności:

(a) $3^{4x-2}<9^{2-x}$; (b) $0.25^{\frac{x+1}{x}}<0.0625$; (c) $2^{x^2-1}-3^{x^2}>3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$;

(d) $3 \cdot 16^x-7 \cdot 12^x+4 \cdot 9^x \leqslant 0$; (e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}-1 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^x$; (f) $5^{x-2} \cdot 3^{x-2}<5^{2x} \cdot 3^{2x}$;

(g) $3^{x-1}+3^{1-x} \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}$; (h) $\left|2^x-2^{-x}\right| \leqslant \frac{3}{2}$; (i) $\frac{1}{e^x-1}<\frac{1}{e^{2x}+1}$.

65. Korzystając z własności logarytmów obliczyć:

(a) $\log_6 3+\log_6 12$; (b) $\log_3 18-\log_3 2$; (c) $9\log_6 \sqrt[3]{36}$;

(d) $3\log_a 4+\log_a \frac{1}{4}-4\log_a 2$; (e) $3\log_4 \sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_4 3+3\log_4 2-\log_4 6$; (f) $\frac{\log_2 54-\log_2 6}{\log_2 27-\log_2 9}$.

66. Rozwiązać równania:

(a) $4\log_2 x=\log_2 81$; (b) $\log_4(x+4)-\log_4(x-1)=2$; (c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{2}} x=-2$;

(d) $\log_2\left(x^2-6\right)=3+\log_2(x-1)$; (e) $2\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x}-\log_{\frac{1}{3}}(6x-1)=0$; (f) $\log x+\log(x-1)=\log(3x+12)$;

(g) $\log_4\left(\log_3\left(\log_2(x-1)\right)\right)=\frac{1}{2}$; (h) $\frac{2}{\log_{\frac{1}{2}} x}=1+\log_{\frac{1}{2}} x$; (i) $\log_x \frac{2x-5}{2x+1}=1$.

67. Rozwiązać nierówności:

(a) $\log_5(5-3x)>1$; (b) $\log(3x-1)-\log(x-1)>\log 2$; (c) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+1)<1+\log_{\frac{1}{5}}\left(16-x^2\right)$;

(d) $\log_2(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)>1$; (e) $\frac{2}{\log_{\frac{1}{3}} x} \geqslant 1-\log_3 x$; (f) $\ln x+\frac{1}{\ln x}>0$;

(g) $\left|\log_{\frac{2}{3}}\left(2-\frac{3}{x+2}\right)\right|>1$; (h) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)\right)>0$; (i) $\log_x\left|x^2-4\right|>0$.

68. Rozwiązać równania lub nierówności:

(a) $2^{x+2}=3^{2x+1}$; (b) $2e^x-5 \cdot e^{-x}=9$; (c) $5^x \cdot 2^{x+1} \leqslant 5^{2x} \cdot 2^{2x}$; (d) $e^x-e^{-x}>2$.

69. (a) Niech $A=(-1,2)$, $B=(0,3)$. Obliczyć współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.

(b) Niech $\boldsymbol{a}=(-1,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,6)$. Wyznaczyć wektory: $2\boldsymbol{a}$, $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.

(c) Niech $\boldsymbol{u}=(p+1,2)$, $\boldsymbol{v}=(3,3q-1)$. Znaleźć liczby p i q, dla których $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

(d) Wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ są znane. Rozwiązać równanie $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{x}$.

(e) Dla jakich wartości parametru p, wektory $\boldsymbol{a}=(-2,6)$, $\boldsymbol{b}=(1,4-p)$ są równoległe.

(f) Obliczyć długość wektora łączącego punkty $A=(-1,3)$, $B=(2,7)$.

(g) Uzasadnić, że w dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego.

(h) Pokazać, że w dowolnym trapezie odcinek łączący środki ramion ma długość równą połowie sumy długości podstaw.

70. (a) Dane są punkty $P = (0, 5)$, $Q = (-2, 1)$. Wyznaczyć współrzędne środka odcinka PQ.

(b) Punkt $K = (1, 1)$ dzieli odcinek AB w stosunku $2 : 1$. Wyznaczyć współrzędne punktu B, jeżeli $A = (3, 5)$.

(c) —rodek masy jednorodnego trójkąta pokrywa się z punktem przecięcia jego środkowych. Znaleźć współrzędne masy jednorodnego trójkąta o wierzchołkach $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$.

71. (a) Obliczyć kąt, jaki tworzą wektory $\boldsymbol{a} = (3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (-5, 12)$.

(b) Dla jakiej wartości parametru p, wektory $\boldsymbol{a} = (p + 1, -3)$, $\boldsymbol{b} = (p - 1, 5)$ są prostopadłe?

(c) Pokazać, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (4, 3)$, $B = (-4, 7)$, $C = (-6, 3)$, $D = (2, -1)$ jest prostokątem.

(d) Wiadomo, że $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = -5$ oraz $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 4$. Obliczyć $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \circ (\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$.

72. (a) Znaleźć równanie kierunkowe prostej, która przecina oś Ox w punkcie -3 i tworzy z dodatnią częścią tej osi kąt $30°$.

(b) Wyznaczyć równanie ogólne prostej, przechodzącej przez punkty $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-2, 5)$.

(c) Równanie prostej $x + 2y - 3 = 0$ napisać w postaci normalnej.

(d) Równanie prostej $2x - y + 5 = 0$ napisać w postaci parametrycznej.

(e) Znaleźć punkty wspólne prostych $x + y = 0$, $x - 2y + 6 = 0$.

(f) Zbadać, czy proste

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = s, \\ y = 5 - 3s \end{cases} (s \in \mathbb{R}),$$

mają punkt wspólny.

73. (a) Niech $A = (-1, 4)$, $B = (3, 2)$. Znaleźć równanie symetralnej odcinka AB.

(b) Przez punkt $P = (1, 5)$ poprowadzić prostą równoległą do prostej $2x - y + 8 = 0$.

(c) Zbadać, czy proste $3x - 4y + 5 = 0$, $\begin{cases} x = 1 + 8t, \\ y = 7 + 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, są równoległe.

(d) Znaleźć równanie parametryczne prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-2, 1)$ i jest równoległa do prostej $x + y - 2 = 0$.

(e) Wyznaczyć kąt ostry między prostymi $3x - 2y + 5 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$.

(f) Znaleźć równania prostych, które przechodzą przez początek układu współrzędnych i tworzą kąt $45°$ z prostą $y = \sqrt{3}x + 3$.

74. (a) Na osi Oy znaleźć punkty, których odległość od punktu $P = (5, 12)$ jest równa 13.

(b) Znaleźć punkty, które są położone w odległości $\sqrt{2}$ od punktu $A = (0, 1)$ i w odległości 5 od punktu $B = (-4, 4)$.

(c) Na prostej $y = x$ znaleźć punkty położone w odległości 5 od punktu $P = (4, -3)$.

(d) Obliczyć odległość punktu $A = (1, -1)$ od prostej $12x - 5y + 9 = 0$.

(e) Wyprowadzić wzór na odległość punktu P_0 o wektorze wodzącym $\boldsymbol{r}_0$ od prostej o równaniu normalnym $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \circ \boldsymbol{n} = 0$.

(f) Uzasadnić, że proste $x - 2y + 3 = 0$, $6y - 3x + 9 = 0$ są równoległe. Nastepnie wyznaczyć odległość między nimi.

(g) Punkty $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$, $C = (5, 4)$ są wierzchołkami trójkata. Obliczyć wysokość trójkąta przechodzącą przez wierzchołek B.

(h) Znaleźć równania dwusiecznych kątów utworzonych przez proste

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} x = 1 + 4s, \\ y = 2 + 3s \end{cases} (s \in \mathbb{R}).$$

75. (a) Wyznaczyć obraz punktu $P = (-2, 3)$ po przesunięciu o wektor $\boldsymbol{v} = (3, 4)$.

(b) Dany jest punkt $P = (4, -1)$ oraz prosta $y = x + 1$. Wyznaczyć współrzędne punktu P' symetrycznego do P względem tej prostej.

(c) Punkt $P = (3, 5)$ obrócono o kąt $135°$ wokół początku układu współrzędnych. Znaleźć jego obraz.

(d) Prostą $y = 6 - 2x$ przekształcono jednokładnie w skali $k = 1/2$ względem osi Ox. Wyznaczyć równanie obrazu tej prostej.