Lista zadań do wykładu Algebry z Geometrią Analityczną.
(wersja z ćwiczeniami w wymiarze 30 godzin)

Mariusz Grech

Wyrażenia algebraiczne (powtórka), indukcja matematyczna, wzór dwumianowy Newtona.

1. Uprość wyrażenia algebraiczne:

$$\textbf{(a)}\ (\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3}); \qquad \textbf{(b)}\ \frac{(x^3y^{-2}z^4)^5}{(2x^{-3}y^3)^2};$$

$$\textbf{(c)}\ \frac{a^3-b^3}{a^2+2ab+b^2} : \frac{b^2-a^2}{a^3+b^3}; \qquad \textbf{(d)}\ \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} - \frac{x-4}{(x+2)(x+1)}.$$

2. **(a)** Uprość wyrażenia algebraiczne:

$$(x^2-y^2)(x^2+y^2); \quad (x^2+xy+y^2)(x-y); \quad (x^2-xy+y^2)(x+y).$$

(b)* Korzystając z powyższych przykładów jako wskazówki uzasadnij, kiedy i jak można przedstawić x^n+y^n na iloczyn dwóch nietrywialnych wyrażeń. Podobnie dla x^n-y^n .

3. Usuń niewymierności z mianownika.

$$\textbf{(a)}\ \frac{8}{\sqrt{17}+3}; \qquad \textbf{(b)}\ \frac{7}{7-\sqrt{35}}; \qquad \textbf{(c)}\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}; \qquad \textbf{(d)}\ \frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

4. Rozwiń wyrażenia:

$$\textbf{(a)}\ (5x-7a)^2; \qquad \textbf{(b)}\ (2y-5b)^3; \qquad \textbf{(c)}\ \left(2z^3+\frac{1}{z}\right)^4; \qquad \textbf{(d)}\ \left(w+\frac{1}{w}\right)^5.$$

5. **(a)** Znajdź współczynnik przy a^5 w wyrażeniu $\left(2a^2-\frac{3}{a^3}\right)^8$.

(b) Znajdź współczynnik przy x^0 w wyrażeniu $\left(3\sqrt{x^3}+\frac{5}{x^2}\right)^7$.

(c) Współczynnik przy t^3 w wyrażeniu $(2+t)^n$ wynosi 160. Oblicz n.

(d) Używając wzoru dwumianowego Newtona oblicz 2.003^4.

6. Używając indukcji matematycznej uzasadnij, że zachodzi:

(a) $4^{2024}-1$ jest podzielne przez 3;

(b) $4^{2\cdot 2024+1}+1$ jest podzielne przez 5;

(c) $0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dla $n\in\mathbb{N}$;

(d) dla $n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ jest podzielne przez 6.

(e) *

$$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{2024}.$$

Działania na macierzach, wyznacznik i macierze odwrotne.

7. Jeśli to możliwe wykonaj następujące działania na macierzach:

$$5A - \frac{1}{2}B^T, \qquad A \cdot B, \qquad B \cdot A, \qquad A^2 \qquad B \cdot B^T$$

$$(\mathbf{a}) \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{b}) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -5 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(\mathbf{c}) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix};$$

8. Znajdź wszystkie macierze przemienne z:

$$(\mathbf{a}) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{b}) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{c}) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{d}) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Znajdź rozmiar macierzy X, aby odpowiednie działania były wykonalne. Następnie rozwiąż równania macierzowe.

$$(\mathbf{a}) \quad X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{b}) \; \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$(\mathbf{c}) \quad X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{d}) \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

10. Dla danych macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oblicz AB, a następnie nie rozwiązując układu równań rozwiąż równanie $BX = C$.

11. Wybierz wiersz lub kolumnę, a następnie napisz odpowiednie rozwinięcie Laplace'a. Nie obliczaj wyznaczników.

$$(\mathbf{a}) \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 9 \\ 8 & 3 & -4 \end{vmatrix}; \qquad (\mathbf{b}) \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. Oblicz wyznaczniki. (W przypadku macierzy 3×3 użyj metody Sarrusa.)

$$(\mathbf{a}) \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}; \quad (\mathbf{b}) \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 9 \\ 8 & 3 & -4 \end{vmatrix}; \quad (\mathbf{c}) \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (\mathbf{d}) \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

13. Oblicz wyznaczniki.

$$(\mathbf{a})\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 19 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix};\quad (\mathbf{b})\ \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix};\quad (\mathbf{c})\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix};\quad (\mathbf{d})\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

14. Przy założeniu, że zmienne są niezerowymi liczbami rzeczywistymi, oblicz wyznaczniki.

$$(\mathbf{a})\ \begin{vmatrix} x & y & y & y & y \\ y & x & y & y & y \\ y & y & x & y & y \\ y & y & y & x & y \\ y & y & y & y & x \end{vmatrix};\quad (\mathbf{b})\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 1 & 1 & 1 \\ p & p & p & 1 & 1 \\ p & p & p & p & 1 \end{vmatrix};\quad (\mathbf{c})\ \begin{vmatrix} q & q & q & q & q \\ 1 & q & q & q & q \\ 1 & 1 & q & q & q \\ 1 & 1 & 1 & q & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & q \end{vmatrix}.$$

15. Mamy dane:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3.$$

Korzystając z własności wyznacznika oblicz.

$$(\mathbf{a})\ \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix};\quad (\mathbf{b})\ \begin{vmatrix} g & a & d \\ h & b & e \\ i & c & f \end{vmatrix};\quad (\mathbf{c})\ \begin{vmatrix} 2a & -3b & 4c \\ 2d & -3e & 4f \\ 2g & -3h & 4i \end{vmatrix};\quad (\mathbf{d})\ \begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d & e & f \\ g+2d & h+2e & i+2f \end{vmatrix}.$$

16. Wiemy, że $\det(A) = -3$. Przy założeniu, że A jest stopnia:

(**a**) 4; (**b**) 5

oblicz wyznaczniki macierzy:

$$2A, \qquad -7A, \qquad A^4, \qquad (A^T)^5.$$

17. Określ rzędy macierzy:

$$(\mathbf{a})\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & -3 \\ 5 & 5 & 10 & 3 \end{bmatrix};\quad (\mathbf{b})\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix};\quad (\mathbf{c})\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -8 & 9 \end{bmatrix}.$$

18. W zależności od parametru, określ rzędy macierzy:

$$(\mathbf{a})\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 4 & a \end{bmatrix};\qquad (\mathbf{b})\ \begin{bmatrix} 1 & b & 2b \\ 2 & 3b & 4b \\ 3 & 5b & 6b \end{bmatrix}.$$

19. Pokaż, że jeżeli wszystkie wyrazy macierzy kwadratowej stopnia k są nieparzystymi liczbami całkowitymi to:
(**a**) wyznacznik jest parzysty.
(**b**)* wyznacznik jest podzielny przez 2^{k-1}.

20. Przy pomocy metody dopełnień algebraicznych, oblicz macierze odwrotne do:

(**a**) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; (**b**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; (**c**) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; (**d**) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$; (**e**) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

21. Używając metody operacji elementarnych oblicz macierze odwrotne do:

(**a**) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; (**b**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; (**c**) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; (**d**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (**e**) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

22. Rozwiąż równania macierzowe:

(**a**) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$; (**b**) $Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

(**c**) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot Z \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; (**d**) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

23. Dla poniższych macierzy wykonaj następujące czynności.
Oblicz A^2, A^3, A^4, A^5.
Na tej podstawie zasugeruj wzór na A^n, a następnie udowodnij go indukcyjnie.
Oblicz A^{2024}.

(**a**) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (**b**) $\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$.

Układy równań liniowych.

24. Bez rozwiązywania układu równań sprawdź, czy ma on jakieś rozwiązania. Jeśli tak, to podaj liczbę parametrów.

(**a**) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ x - 7y + 2z = 3 \end{cases}$; (**b**) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ 5x - y + 4z = 3 \end{cases}$;

(**c**) $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3t + s = 1 \\ 2x - y + 2z - s = 2 \\ x - 3y + z - t = 3 \\ 4x - 2y + z + 4t = 6 \end{cases}$; (**d**) $\begin{cases} -x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + y - z - t = 0 \\ x - y + 2z + 3t = 0 \\ 4x - 2y + t = 0 \end{cases}$;

25. Korzystając ze wzorów Cramera oblicz zmienną y w układach równań:

(**a**) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 4x + 5y = 5 \end{cases}$; (**b**) $\begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ 3x + y - z = 3 \\ 4x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$; (**c**) $\begin{cases} 3x + 6y + 5z - 5t = 3 \\ 3x + 8y - z + 2t = 4 \\ 4x - 2y + 3z - t = -1 \\ 3x - 4y + 7z - 2t = -2 \end{cases}$.

26. Stosując metodę minorów i używając wzory Cramera rozwiąż układy równań:

$$(\mathbf{a})\ \begin{cases} x+y+2z=4 \\ 4x-y-2z=1 \\ -x+3y+6z=8 \end{cases};\qquad (\mathbf{b})\ \begin{cases} -3x+6y+2z+t=2 \\ 2x-4y-z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=1 \end{cases}.$$

27. Przy pomocy metody eliminacji Gaussa rozwiąż układy równań:

$$(\mathbf{a})\ \begin{cases} x+2y-z=2 \\ 5x-3y+4z=11 \\ -2x+y+z=3 \end{cases};\quad (\mathbf{b})\ \begin{cases} -2x+3y+2z+t=14 \\ x-2y-z+t=-7 \\ 3x-3y+2z+4t=7 \\ 4x-y+2z-t=0 \end{cases};\quad (\mathbf{c})\ \begin{cases} x+y+3z+3t+s=6 \\ x+2y-3z+t-s=3 \\ 2x+3y+z+t-s=5 \\ y+2z-t+2s=2 \\ z+3t=3 \end{cases};$$

$$(\mathbf{d})\ \begin{cases} x+y+2z-t=3 \\ x+2y+3z+4t=2 \\ 2x-y+4z-t=7 \end{cases};\quad (\mathbf{e})\ \begin{cases} -3x+2y+z+2t=5 \\ 2x-3y-4z+5t=-6 \\ x-4y+-7z+12t=3 \end{cases};\quad (\mathbf{f})\ \begin{cases} 2x+y+3z=12 \\ x-3y-z=3 \\ 3x+2y+6z=23 \\ x+3y+5z=15 \end{cases}.$$

28. Rozwiąż poniższe zadania układając odpowiednie układy równań.

(a) Mamy dane trzy liczby naturalne. Jeśli dodamy pewne dwie z nich i od sumy odejmiemy ostatnią, to otrzymamy odpowiednio wyniki: 2, 8, 6. Jakie to liczby?

(b) Zawodnicy X, Y, Z biegają ze stałą prędkością (niekoniecznie z tą samą). Na zawodach odbyły się trzy biegi. W każdym z nich jeden z zawodników biegł przez 3 minuty, a pozostałych dwóch po dwie. (W pierwszym biegu X biegł 3 minuty, w drugim Y a w trzecim Z). Uzyskali odpowiednio rezultaty: $2,1$ km, $2,15$ km, 2.05 km. Jaki dystans każdy z nich jest w stanie przebiec w ciągu minuty?

(c) Do wyprodukowania pewnego produktu potrzebni są specjaliści czterech rodzajów: A, B, C i D. Pensje specjalisty danego rodzaju wszędzie są takie same. Cztery fabryki produkują ten produkt. Mają one różne technologie, dlatego potrzebują inną ilość specjalistów danego rodzaju. Ilość specjalistów zatrudnianych w fabrykach wyrazimy jako wektor. Tak więc w tych fabrykach pracuje odpowiednio $[2,3,1,4]$, $[2,2,2,1]$, $[3,2,2,3]$, $[1,4,4,2]$ specjalistów. Na ich pensje fabryki przeznaczają odpowiednio 67, 54, 76 i 83 tysiące złotych. Jakie są pensie specjalistów każdego rodzaju?

Liczby zespolone.

29. Wykonaj działania:

$$(\mathbf{a})\ (2+3i)-(4-2i)+\overline{(-5+i)};\quad (\mathbf{b})\ (3-2i)(5+2i);\quad (\mathbf{c})\ \frac{6+2i}{2-i};\qquad (\mathbf{d})\ (4-3i)\overline{(4-3i)}$$

$$(\mathbf{e})\ \frac{(1+3i)(2-i)}{5+i};\qquad (\mathbf{f})\ (1-2i)^4;\qquad (\mathbf{g})\ i^{2024}-i^{1410}+(-i)^{1025}-\overline{(i^{1918})}.$$

30. Rozwiąż poniższe równania:

$$(\mathbf{a})\ (2+3i)(z-i)+(2-3i)=5+2i;\qquad (\mathbf{b})\ (1-4i)z+(2+3i)\overline{z}=5+2i;$$

$$(\mathbf{c})\ |z|+2z=-1-8i;\qquad (\mathbf{d})\ z^2=\overline{z};\qquad (\mathbf{e})\ 2|z|^2-2z^2=4-6i.$$

31. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiory spełniające warunki:

(**a**) $Re(3z-i) = Im(z+1)$; (**b**) $2 < Re(z-i) \leq 4$; (**c**) $1 < Im(iz+5) \leq 2$;

32. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych narysuj zbiory spełniających warunki:

(**a**) $|z-3| = 2$; (**b**) $|z+(1-i)| < 3$; (**c**) $|2z-3i| \geq 4$; (**d**) $|(1+\sqrt{3}i)z+(1-\sqrt{3}i)| \leq 6$;

(**e**) $|\overline{z}-2+i| = 2$; (**f**) $|z-i| = |z+1|$; (**g**) $|z+1+3i| > |z-1+2i|$; (**h**) $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| \leq 1$.

33. Przedstaw w postaci trygonometrycznej lub wykładniczej liczby:

(**a**) -7; (**b**) 3π; (**c**) $2-2i$; (**d**) $-5i$; (**e**) $4+4\sqrt{3}i$;

(**f**) $3\sqrt{3}-3i$; (**g**) $2024i$; (**h**) $-5-5i$; (**i**) $-7+7\sqrt{3}i$.

34. Oblicz:

(**a**) $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2024}$; (**b**) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{1410}$; (**c**) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{1945}$. (**d**) $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{57}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{151}}$.

Wynik podaj w postaci algebraicznej.

35. Podaj w postaci algebraicznej wszystkie pierwiastki trzeciego stopnia z liczb

(**a**) -27; (**b**) $-i$; (**c**) $(1+i)^3$; (**c**) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

36. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej wszystkie pierwiastki czwartego stopnia z liczb:

(**a**) 1 (**b**) $2+2\sqrt{3}i$; (**c**) $16-16i$.

37. Oblicz sumę wszystkich pierwiastków 8-go stopnia z 1.

38. * Oblicz sumę wszystkich pierwiastków 2024-go stopnia z $2024-i$.

39. ** Oblicz iloczyn wszystkich pierwiastków 2024-go stopnia z 1.

40. Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych równania:

(**a**) $z^2+4z+5=0$; (**b**) $x^2-10x+29=0$; (**c**) $z^2+(-1+4i)z = 5-i$; (**d**) $z^4-3z^2=4$;

(**e**) $z^2+(1-3i)z-2-2i=0$. (**f**) $z^4 = (1+z)^8$; (**g**) $z^6+(1+i)z^3+i=0$.

Wielomiany i funkcje wymierne.

41. Wielomian W przedstaw w postaci $W = P \cdot Q + R$, gdzie:

(**a**) $W(x) = x^4-2x^3+3x^2-6, \quad Q(x) = x^2-x+2$;

(**b**) $W(x) = 2x^5+3x^4-x^3+4x^2-1, \quad Q(x) = x^2-3x+5$.

42. Wypisz potencjalne pierwiastki całkowite i wymierne wielomianów:

(**a**) $x^4-2x^3+2024x^2+3x-6$; (**b**) $4x^3-2x^2+17x+9$; (**c**) $x^3-\frac{5}{3}x^2+32x+2$;

43. Znajdź pierwiastki wymierne wielomianów:

(**a**) $x^3-6x^2+11x-6$; (**b**) x^4-2x^3+2x-1; (**c**) x^4-x^2-3; (**d**) $x^4+x^3+x^2+3x-6$;
(**e**) $x^5-x^4+4x^3-4x^2+3x-3$; (**f**) $2x^4+7x^3-4x^2-27x-18$.

44. Korzystając z tego, że x_0 jest pierwiastkiem danego wielomianu, znajdź jego wszystkie pierwiastki zespolone.

(**a**) $x^4+2x^3+3x^2+2x+2, \quad x_0=i$; (**b**) $x^4+4x^3+3x^2+10x+50, \quad x_0=1-2i$.

45. Znajdź rozkład wielomianów na rzeczywiste czynniki nierozkładalne:

(**a**) $x^3-4x^2+3x-12$; (**b**) x^4+4; (**c**) x^4+4x^2+3; (**d**) $x^4-2x^3-x^2+2x+10$.

46. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu W przez wielomian Q.

(**a**) $W(x)=(x-4)^{2024}-(x-3)^{1410}+(x-2)^{1025}, \qquad Q(x)=x-3$;
(**b**) $W(x)=x^{2024}-x^{1974}, \quad Q(x)=x^3-x$; (**c**) $W(x)=x^{2024}, \quad Q(x)=x^2+1$;
(**d**) * $W(x)=x^{53}, \qquad Q(x)=(x-1)^2$.

47. Podane funkcje wymierne rozłóż na sumę wielomianu i ułamków prostych.

(**a**) $\dfrac{8x-31}{(x-5)(x+4)}$; (**b**) $\dfrac{-12x+2}{(x-3)(x-1)(x+2)}$; (**c**) $\dfrac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x-2)(x-1)}$; (**d**) $\dfrac{5x^2-31x+39}{(x-4)^2(x+1)}$;
(**e**) $\dfrac{4x^2+9}{(x^2+1)(x^2+2)}$; (**f**) $\dfrac{7(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+3)}$; (**g**) $\dfrac{x^5+x^4-5x^2-9}{x^4+x^3-x^2+x-2}$; (**h**) $\dfrac{x^5+12x^3-2x^2+13x-5}{(x^2+2)^2}$.

Diagonalizacja macierzy, wektory i wartości własne.

Aby zaoszczędzić miejsce, wektory będą pisane poziomo, zamiast pionowo. Do zastosowań proszę używać v^T.

48. Sprawdź, które z wektorów:

$$v_1=[0,6,2], \quad v_2=[2,4,-1], \quad v_3=[-6,0,-4], \quad v_4=[1,-2,1]$$

są wektorami własnymi poniższej macierzy. Jakie są odpowiadające im wartości własne.

$$\begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ -4 & 4 & 6 \\ -8 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

49. Oblicz wielomiany charakterystyczne macierzy:

(**a**) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; (**b**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; (**c**) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2024 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (**d**) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

50. Podaj przestrzenie własne macierzy:

(**a**) $\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$; (**b**) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$; (**c**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

51. Oblicz A^{2024} gdy A jest jedną z macierzy:

$$(\mathbf{a})\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad (\mathbf{b})\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (\mathbf{c})\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

52. $A \in M_{2\times 2}$ ma wektory własne $[2,3]$ i $[4,-1]$. Odpowiadające im wartości własne to -1 i 3. Znajdź A.

53. $B \in M_{3\times 3}$ ma wektory własne $[1,0,1]$, $[2,1,1]$ i $[0,-1,1]$. Odpowiadające im wartości własne to 1, 0 i 2. Znajdź B.

Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$.

54. Niech $v = [1,3,-2], w = [4,0,2], u = [-1,1,5]$. Wykonaj obliczenia:
(**a**) $|v|$; (**b**) $w \circ u$; (**c**) $v \times w$; (**d**) $(w\times u)\circ v$; (**e**) $\det(v,w,u)$; (**f**) $(w+2v)\circ u$; (**g**) $v\times(w-u)$.

55. Dla jakiej wartości parametru a punkt $(4,a,1)$ leży na jednej prostej z punktami $(1,2-5)$ i $(2,1,-3)$.

56. Znajdź wektor długości 2, który jest równoległy do wektora $[2,-3,\sqrt{3}]$.

57. Sprawdź, czy któryś z poniższych trójkątów ABC jest prostokątny.
(**a**) $A = (2,3,-1)$, $B = (4,0,5)$, $C = (1,1,1)$; (**b**) $A = (1,2,-1)$, $B = (2,4,-4)$, $C = (-4,6,0)$;

58. Oblicz kąt przy wierzchołku C w trójkącie o wierzchołkach:

$$A = (3,2,3),\ B = (3,2,4),\ C = (2,1,3).$$

59. Wiemy, że $|v| = 1, |w| = 2, |u| = 3$ oraz, że wszystkie kąty pomiędzy wektorami wynoszą $\frac{\pi}{3}$. Oblicz $|v + w + u|$.

60. Oblicz $|v|$, jeśli $|v + w| = 22$, $|w - v| = 24$ i $|w| = 13$.

61. Wiemy, że $|v| = 2$ i $|v| = 4$. Oblicz, dla jakiego t, wektory $w - tv$ i $w + tv$ są prostopadłe.

62. Znajdź wszystkie wektory długości 5, które są prostopadłe do wektorów $[1,2,1]$ i $[-2,1,3]$.

63. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $(2,-5,1)$, $(3,0,5)$ i $(7,-2,1)$.

64. Oblicz wszystkie wysokości trójkąta z zadania **??**.

65. Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach:

$$(2,1,4), \quad (-1,3,2), \quad (1,4,5), \quad (2,5,1).$$

66. Oblicz pole powierzchni bocznej czworościanu z zadania **??**.

67. Oblicz wysokość czworościanu z zadania **??**, opuszczoną z wierzchołka $(1,4,5)$.

68. Napisz równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez:

(**a**) punkty $(2,0,1)$, $(7,-3,0)$ i $(4,-1,1)$;

(**b**) punkt $(1,2,5)$ i prostopadłej do wektora $[2,5,-3]$.

69. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny o równaniu ogólnym $2x - 5y + 4x - 1 = 0$.

70. Napisz równanie ogólne płaszczyzny o równaniu parametrycznym

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + [1, 4, 1]t + [-2, 1, 1]s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

71. Napisz równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(1, -1, 2)$, oraz prostopadłej do płaszczyzn o równaniach $2x + 2y + 3z - 7 = 0$ i $x + 6y - 3z + 5 = 0$.

72. Napisz równania parametryczne i kierunkowe prostych

(a) przechodzącej przez punkty $(1, 4, -3)$ i $(3, 2, 1)$;

(b) przechodzącej przez punkt $(7, 3, -5)$ i równoległej do prostej o równaniu

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 3 = 0 \\ 5x + 2y - z + 6 = 0 \end{cases};$$

(c) przechodzącej przez punkt $(-3, 2, 4)$ i prostopadłej do prostych o równaniach

$$(x, y, z) = (0, 1, 3) + [2, 7, 1]t, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \frac{x-3}{4} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

73. Napisz równanie krawędziowe prostej z zadania **??**.

74. Znajdź punkt przecięcia (o ile się przecinają) prostych o równaniach

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

75. Znajdź punkt przecięcia się prostej o równaniu $\frac{x-5}{3} = y = \frac{z-3}{-1}$ z płaszczyzną o równaniu $3x + y - z - 1 = 0$.

76. Wyznacz odległość punktu $(2, 4, 1)$ od płaszczyzny o równaniu $3x - y + 5z - 2 = 0$.

77. Wyznacz odległość punktu $(2, 4, 1)$ od płaszczyzny o równaniu

$$(x, y, z) = (-2, 1, 2) + [1, 2, 2]t + [3, 1, 2]s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

78. Wyznacz odległość punktu $(1, 5, -2)$ od prostej o równaniu

$$(x, y, z) = (3, 1, 7) + [4, -2, 3]t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

79. Oblicz odległość prostej z zadania **??** od płaszczyzny z zadania **??**.

80. Oblicz odległość pomiędzy prostymi o równaniach

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

81. Oblicz rzut prostokątny

(a) punktu $(1,3,-4)$ na prostą o równaniu $(x,y,z)=[1,2,-2]t,\ t\in\mathbb{R}$;

(b) punktu $(2,3,4)$ na prostą o równaniu $(x,y,z)=(1,2,5)+[1,-1,-2]t,\ t\in\mathbb{R}$;

(c) punktu $(5,8,-3)$ na płaszczyznę o równaniu $2x+3y-3z+1=0$;

(d) punktu $(2,5,-1)$ na płaszczyznę o równaniu

$$(x,y,z)=[1,2,2]t-[2,-1,1]s\ \ t,s\in\mathbb{R};$$

(e) * prostej z podpunktu **(b)** na płaszczyznę z podpunktu **(d)**.

82. Znajdź rzut punktu $(7,-1,-1)$ na płaszczyznę o równaniu $3x-y+2z-11=0$ w kierunku wektora $[2,-1,-2]$.

83. Znajdź punkt symetryczny do punktu $(5,3,4)$ względem prostej o równaniu

$$x-3=\frac{x-6}{2}=2-z.$$

84. Znajdź punkt symetryczny do punktu $(4,0,7)$ względem płaszczyzny o równaniu

$$x-2y+z+1=0.$$

85. Sprawdź czy punkty $(2,5,-1)$ i $(1,-1,2)$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny o równaniu

$$3x-2y+5z-7=0.$$

86. Oblicz kąty między prostymi o równaniach

$$\text{(a)}\quad -2=\frac{y-7}{2}=\frac{z-2}{3}\quad \text{i}\quad \frac{x+3}{-4}+\frac{y-4}{-1}+\frac{z-1}{2};$$

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} x=5+4t\\ y=3\\ z=7+3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\quad \text{i}\quad \begin{cases} x=1+t\\ y=3+\sqrt{11}t\\ z=4+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

87. Oblicz kąty pomiędzy płaszczyznami o równaniach

$$\text{(a)}\quad x-2y+z-7=0\quad \text{i}\quad x+2y-z+2024=0;$$

$$\text{(b)}\quad 5x+2y+z-6=0\quad \text{i}\quad (x,y,z)=(2,1,3)+[4,3,2]t+[2,-1,-4]s\quad t,s\in\mathbb{R}.$$

88. Oblicz kąty pomiędzy prostą o równaniu $(x,y,z)=(2,3,6)+[1,\sqrt{2},-1]t,\ t\in\mathbb{R}$ i płaszczyzną o równaniu $x+\sqrt{2}y+z+9=0$.

Krzywe stożkowe.

89. Napisz równanie okręgu:

(a) o środku w punkcie $(3,-4)$ i przechodzącego przez początek układu współrzędnych;

(b) o środku w punkcie $S(1,-2)$ i przechodzącego przez punkt $A(-2,-6)$.

90. Napisz równanie elipsy o środku w punkcie $(-1,2)$ jeżeli jej półosie a,b są równoległe odpowiednio do osi $0x$ i $0y$ i wynoszą $a=1, b=2$;

91. Parabolę $y^2 = 4x$ przesunięto tak, że jej wierzchołek znalazł się w punkcie (3,1). Napisz równanie przesuniętej paraboli.

92. Dane są punkty A$(4, -1)$ i B$(1, 2)$. Znajdź zbiór punktów X, dla których:

(a) suma kwadratów odległości od A i od B wynosi 20;

(b) różnica kwadratów odległości od A i od B wynosi 10.

93. Dane są punkty A$(-1, 1)$ i B$(3, -1)$. Znajdź zbiory punktów X, dla których:

(a) odległość od A jest równa odległości od B;

(b) odległość od A jest dwa razy większa niż odległość od B;

(c) wektory AX i BX są prostopadłe;

(d) środek odcinka AX leży na okręgu o środku w punkcie (3,3) i promieniu 1.

94. Rozpoznaj następujące krzywe (zbiory) stopnia 2 sprowadzając ich równania do postaci kanonicznej:

(**a**) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 28 = 0$; (**b**) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 29 = 0$;
(**c**) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 30 = 0$; (**d**) $x^2 - 5y^2 - 4x - 50y - 123 = 0$;
(**e**) $x^2 - 5y^2 - 4x - 50y - 121 = 0$; (**f**) $-y^2 - 7x + 8y - 21 = 0$;
(**g**) $-y^2 + 8y - 21 = 0$; (**h**) $-y^2 + 8y - 11 = 0$.

95. * Napisz równanie hiperboli o asymptotach

$$2x - 3y = 5; \qquad 2x + 3y = -1.$$