Matematyka 2 (Wydział Architektury)

Lista 1: Funkcje dwóch zmiennych

I Wyznaczyć i narysować dziedziny funkcji:

1. $z = \frac{3x}{2x-5y}$
2. $z = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
3. $z = \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
4. $z = \frac{x^2y}{x^2+y^2-4y-21}$
5. $z = \ln\left(\frac{x^2+y^2-4}{9-x^2-y^2}\right)$
6. $z = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\ln(y-|x|+1)}$
7. $z = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg}(xy)-\frac{\pi}{4}}}$
8. $z = \frac{1}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$
9. $z = 3^x + y\log_2(2\cos y + 1)$
10. $z = \arcsin\frac{x}{y}$
11. $z = \ln(y - \sqrt{4x - x^2})$
12. $z = \frac{y}{\sin x}$
13. $z = \sqrt{x \sin y}$

II Naszkicować i opisać we współrzędnych biegunowych obszary:

1. $x^2 + y^2 \leq 4$
2. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$
3. $x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0$
4. $x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq x\sqrt{3}$
5. $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$
6. $x^2 + y^2 \leq 4x,\ x^2 + y^2 \leq 4y$
7. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}|x|$
8. $y \leq x^2 + y^2 \leq x,\ y \geq 0$
9. $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$
10. $(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2$

III Naszkicować powierzchnie o zadanych równaniach

1. $z = x^2 + y^2$
2. $z = x^2 - y^2$
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
6. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
7. $z = 3 - \sqrt{6x - x^2 - y^2}$
8. $z = \sin x$
9. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
10. $x^2 + y^2 = 4$
11. $x^2 + y^2 = 2y$

IV Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

1. $f(x, y) = x^2y + 2x + 3y$;
2. $f(x, y) = \sin(x \cos y)$;
3. $f(x, y) = e^{\sin\frac{x}{y}}$;
4. $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{1-xy}{x+y}$.

V Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji i sprawdzić, czy pochodne mieszane są rzeczywiście równe:

1. $f(x, y) = x + \frac{x}{y}$;
2. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$;
3. $f(x, y) = xe^{xy}$;
4. $f(x, y) = y\ln(xy)$.

VI Wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne następujących funkcji. Ustalić, które z nich są minimami, a które maksymami:

1. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
3. $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y, \quad (x,y > 0)$;
4. $f(x,y) = xy^2(12 - x - y), \quad (x,y > 0)$;
5. $f(x,y) = (2x + y^2)e^x$;
6. $f(x,y) = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$.

VII Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji przy zadanych ograniczeniach na argumenty:

1. $f(x,y) = x^2 + y2, \quad 3x + 2y = 6$;
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 10, \quad x - y^2 + 1 = 0$;
3. $f(x,y) = 2x + 3y, \quad x^2 + y^2 = 1$.

VIII Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

1. $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}$;
2. $f(x,y) = x^2 + y^2, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$;
3. $f(x,y) = xy^2 + 4xy - 4x, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 0\}$;
4. $f(x,y) = x^4 + y^4, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

IX Na płaszczyźnie $x + 2y - 3z = 6$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.

X Wśród wszystkich prostopadłościanów wpisanych w kulę o promieniu R znaleźć ten, który ma największą objętość.

XI Jakie powinny być wymiary prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

XII Prostopadłościenny magazyn ma mieć kubaturę 216 m^3. Do budowy ścian jego ścian użyte zostaną płyty w cenie 30 zł/m^2, podłogi będą kosztować 40 zł/m^2, a sufit — 20 zł/m^2. Jakie wymiary powinien mieć magazyn, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

XIII Obliczyć następujące całki:

1. $\int x \cos y dx$
2. $\int x \cos y dy$
3. $\int x^y dx$
4. $\int x^y dy$
5. $\int xye^{x^2y} dx$
6. $\int xye^{x^2y} dy$
7. $\int \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y} dx$
8. $\int \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y} dy$

XIV Narysować obszary całkowania i obliczyć następujące całki iterowane:

1. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xydx$;
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^x \sin(x+y)dy$;
3. $\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2\sqrt{y-x}dy$;
4. $\int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^3 + y^3)dx$;
5. $\int_0^3 dy \int_0^y \sqrt{y^2+16}dx$;
6. $\int_1^4 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2} dy$.

XV Zapisać całkę $\iint_D f(x,y)dxdy$ jako całkę iterowaną, jeśli obszar D jest ograniczony następującymi krzywymi:

1. $x^2 + y = 2, y^3 = x^2$;
2. $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$;
3. $x^2 + y^2 = 4, y = 2x - x^2, x = 0 \quad (x, y \geq 0)$;
4. $x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3; \quad x \geq 0$.

XVI Zamienić kolejność całkowania w następujących całkach iterowanych:

1. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$;
2. $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$;
3. $\int_0^9 dx \int_{\sqrt{x}}^3 f(x,y)dy$;
4. $\int_0^3 dx \int_{\frac{2}{9}x^2}^{\frac{2}{3}x} f(x,y)dy$;
5. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$;
6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{-1}^{\operatorname{tg} y} f(x,y)dx$.

XVII Obliczyć następujące całki podwójne (jeśli obszar jest podany jako zestaw krzywych, chodzi o obszar ograniczony tymi krzywymi):

1. $$\iint_D xy^2 dxdy, \quad D : y = x, y = 2 - x^2;$$
2. $$\iint_D x^2 y dxdy, \quad D : y = -2, y = \frac{1}{x}, y = -\sqrt{-x};$$
3. $$\iint_D (xy + x)dxdy, \quad D : x = 0, y = -1, y = 3 - x^2 (x \geq 0);$$
4. $$\iint_D (xy + 4x^2)dxdy, \quad D : y = x + 3, y = x^2 + 3x + 3;$$
5. $$\iint_D (2x - 3y + 2)dxdy, \quad D : y = 0, y = \pi, x = -1, x = \sin y;$$
6. $$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy, \quad D : y = \sqrt{x}, x = 0, y = 1;$$
7. $$\iint_D e^{x^2} dxdy, \quad D : y = 0, y = 2x, x = \sqrt{\ln 3};$$
8. $$\iint_D y^2 e^{xy} dxdy, \quad D : y = x, x = 1, y = 0;$$
9. $$\iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy, \quad D : x = 0, y = x, y = 1;$$

XVIII Obliczyć następujące całki iterowane, zamieniając kolejność całkowania.

1.
$$\int_{-2}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} xe^{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx;$$

2.
$$\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} \sqrt{1+\frac{x}{y}} dy;$$

3.
$$\int_{0}^{1} dx \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{1} (xy+\sin(y^4)) dy;$$

4.
$$\int_{0}^{\sqrt{\pi}} dy \int_{y}^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx;$$

5.
$$\int_{0}^{4} dx \int_{0}^{x^2} \frac{y^3}{4-\sqrt{y}} dy;$$

6.
$$\int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt[3]{x^2}}^{1} 2x\sqrt{1+y^4} dy.$$

XIX Korzystając ze współrzędnych biegunowych, obliczyć następujące całki podwójne:

1.
$$\iint_D xy^2 dxdy, \quad D = \left\{x^2+y^2 \leq 4\right\};$$

2.
$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy, \quad D = \left\{1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\right\};$$

3.
$$\iint_D y^2 e^{(x^2+y^2)} dxdy, \quad D = \left\{x^2+y^2 \leq 1, y \geq x\right\};$$

4.
$$\iint_D \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy, \quad D = \left\{1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq \sqrt{3}\,|x|\right\};$$

5.
$$\iint_D \frac{8xy}{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dxdy, \quad D = \left\{x^2+y^2 \leq x; y \geq 0\right\};$$

6.
$$\iint_D (x^2+y^2) dxdy, \quad D = \left\{0 \leq y \leq x^2+y^2 \leq x\right\};$$

7.
$$\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}, \quad D = \left\{x \geq 0, (x^2+y^2)^2 \leq 4(x^2-y^2)\right\};$$

8.
$$\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dxdy, \quad D = \left\{x^2+y^2+4y < 0, x \leq 0, y \leq x\sqrt{3}\right\};$$

9.
$$\iint_D \frac{x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}{x^2+y^2}, \quad D = \left\{y^2 \leq (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \leq x^2\right\};$$

10.
$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}, \quad D = \left\{x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 1\right\}.$$

XX Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

1. $x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq x\sqrt{x}$;
2. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$;
3. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$;
4. $(x^2 + y^2) = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0$.

XXI Naszkicować bryły ograniczone następującymi powierzchniami i obliczyć ich objętości:

1. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = -3 + \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $z = 4 - x^2 - y^2, z = -4 + x^2 + y^2$;
3. $z = 0, x^2 - 2x + y^2 = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
4. $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1$;
5. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x,$ $x^2 + y^2 = 2x, z = 0$;
6. $z = -2 + \sqrt{x^2 + y^2}, z = 10 - x^2 - y^2$;
7. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + 2 + y^2 - 2x = 0$.

XXII Obliczyć pola powierzchni wyciętych:

1. walcem $x^2 + y^2 = 2$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$;
2. walcem $x^2 + y^2 = 1$ z walca $x^2 + z^2 = 1$;
3. walcem $x^2 + y^2 = 2x$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
4. walcem $x^2 + y^2 = 1$ ze stożka $y^2 + z^2 = x^2$.

XXIII Obliczyć masę koła o promieniu R, w którym gęstość jest wprost proporcjonalna (z współczynnikiem proporcji γ) do:

1. kwadratu odległości od ustalonej średnicy;
2. kwadratu odległości od ustalonego punktu leżącego na brzegu.

XXIV Obliczyć masę kwadratu o boku a, w którym gęstość jest wprost proporcjonalna (z współczynnikiem proporcji γ) do:

1. kwadratu odległości od środka;
2. kwadratu odległości od ustalonego boku;
3. odległości od ustalonego boku;
4. kwadratu odległości od ustalonego wierzchołka;
5. kwadratu odległości od ustalonej przekątnej;
6. odległości od ustalonej przekątnej.

XXV Wyznaczyć środki masy następujących figur jednorodnych:

1. Trójkąt równoboczny o boku a.
2. Wycinek koła o promieniu R i kącie α.

XXVI Wyznaczyć środek masy półkola o promieniu R, jeśli jego gęstość jest wprost proporcjonalna (z współczynnikiem γ) do odległości od:

1. środka;
2. podstawy;
3. osi symetrii.