Matematyka 2 (Wydział Architektury)

Lista 2: Geometria analityczna w trzech wymiarach

I Czy trójkąt o wierzchołkach $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,3)$, $C = (1,4,-3)$ jest prostokątny? Wskazówka: sprawdzić, czy jego boki spełniają równość z twierdzenia Pitagorasa.

II Wyznaczyć czwarty wierzchołek prostokąta $ABCD$, wiedząc że $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,3)$, $C = (-1,4,2)$.

III Wyznaczyć wektory będące środkowymi trójkąta ABC, wiedząc że $\vec{AB} = (2,0,2)$ i $\vec{AC} = (0,2,4)$.

IV Wyznaczyć wektor, który leży w płaszczyźnie wyznaczanej przez wektory $(1,2,3)$ i $(6,-4,2)$, a ponadto tworzy z nimi jednakowe kąty.

V Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:

1. $\vec{a} = (-1,5,2), \vec{b} = (3,0,7)$,
2. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$,

VI Znaleźć kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach $A = (2,-1,3), B = (1,1,1), C = (0,0,5)$.

VII Dla jakich wartości parametru t trójkąt o wierzchołkach $A = (0,0,0)$, $B = (3,4,0)$ i $C = (3t, 4t, 1+t)$ jest prostokątny?

VIII Wyznaczyć dowolny wektor prostopadły do wektorów $\vec{a} = (1,2,-3)$ i $\vec{b} = (-3,4,1)$.

IX Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,2,2)$ i $(-4,0,2)$

X Dobrać liczby a i b tak, aby punkty $(0,2,1)$, $(1,2,3)$ i $(a,b,7)$ leżały na jednej prostej.

XI Dla jakiej wartości parametru p objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach $(1,0,1)$, $(1,1,2)$, $(2,1,1)$ i (p,p,p) będzie równa 1?

XII Napisać równanie ogólne płaszczyzny:

1. przechodzącej przez punkt $(1,-2,0)$ i prostopadłej do wektora $(0,-3,2)$;
2. przechodzącej przez punkt $(0,3,0)$ i równoległej do płaszczyzny $3x - y + 2 = 0$;
3. przecinającej oś z w punkcie o współrzędnej $z = 1$ i zawierającej punkty $(0,3,0)$ i $(1,2,2)$;
4. przechodzącej przez punkty $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(-1,3,5)$.

XIII Napisać równanie parametryczne i kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $(2,3,1)$ oraz:

1. równoległej do wektora $(2,1,4)$;
2. przechodzącej przez punkt $(3,5,2)$;
3. prostopadłej do płaszczyzny $3x + 2y - z - 2 = 0$;
4. prostopadłej do wektorów $(0,3,4)$ i $(3,1,5)$.

XIV Czy proste $l_1 = \{x = 1+t; y = 2+t; z = 4+2t\}$ i $l_2 = \{x = -1-2s; y = 3+s; z = -4-8s\}$ mają punkt wspólny?

XV Czy płaszczyzna $\pi : x + y - z + 3 = 0$ i prosta $l = \{x = 1+t, y = 3+2t, z = 5+3t\}$ mają punkt wspólny?

XVI Obliczyć odległość

1. punktu $(1,4,2)$ od płaszczyzny $2x-y+z-2=0$;
2. punktu $(2,1,2)$ od prostej $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-1}$;
3. płaszczyzn równoległych $x-2y+2z-3=0$ i $-x+2y-2z+6=0$;
4. prostych równoległych $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ i $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-2}$;
5. prostych skośnych $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-2}$ i $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$;
6. prostej $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}$ od płaszczyzny $-2x+y+3=0$.

XVII Znaleźć rzut prostokątny

1. punktu $(1,1,0)$ na płaszczyznę $x-y+3z-1=0$;
2. punktu $(2,1,1)$ na prostą $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$;
3. prostej $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ na płaszczyznę $2x-z+3=0$.

XVIII Znaleźć punkt symetryczny do punktu $(1,2,0)$ względem

1. punktu $(2,2,1)$;
2. prostej $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$;
3. płaszczyzny $x+y-2z+1=0$.

XIX Znaleźć prostą symetryczną do prostej $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$ względem

1. punktu $(1,1,0)$;
2. prostej $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$;
3. płaszczyzny $x-2z+1=0$.

XX Czy punkt $(1,2,1)$ leży między płaszczyznami równoległymi $6x-3y+6z+3=0$ i $4x-2y+4z-2=0$?

XXI Czy punkty $(-2,4,3)$ i $(1,-2,2)$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $(2x+3z-7=0)$?

XXII Wyznaczyć prostą, która przecina prostopadle proste $k_1:\frac{x+4}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ i $k_2:\frac{x-2}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-2}$.

XXIII Wyznaczyć obie proste, które przechodzą przez punkt $P=(1,1,5)$ i przecinają prostą $k:\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{2}$ pod kątem $60°$.

XXIV Dana jest płaszczyzna $\pi: x+y+z=1$ oraz punkty $P=(2,2,0)$ i $Q=(5,8,-3)$. Promień światła wychodzący z punktu P po odbiciu od płaszczyzny przechodzi przez punkt Q. Znaleźć równania prostych, na których leżą promienie: padający i odbity.

XXV Dla jakich wartości parametrów α i β prosta o równaniu $\{x=\alpha+\alpha t, y=1-3t, z=\beta+3t\}$ leży na płaszczyźnie $x+2y-3z+1=0$?

XXVI Czy prosta łącząca punkty $P=(-1,3,-1)$ i $Q=(3,-3,-1)$ przechodzi przez wnętrze kwadratu $ABCD$, gdzie $A=(0,0,0)$, $B=(2,2,-1)$, $C=(3,0,-3)$, $D=(1,-2,-2)$?