Całki podwójne — wstęp

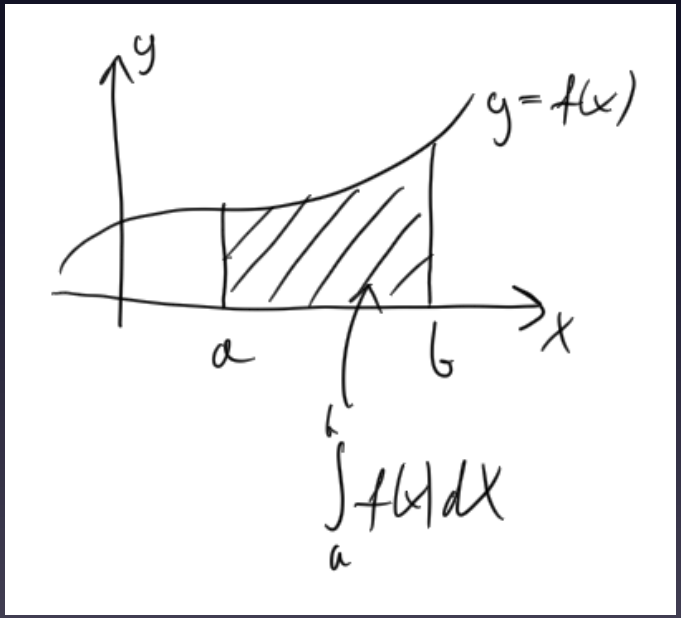
Wykład dla Wydziału Architektury

Dawid Huczek

17.03.2020 r.

Interpretacja całki pojedynczej:

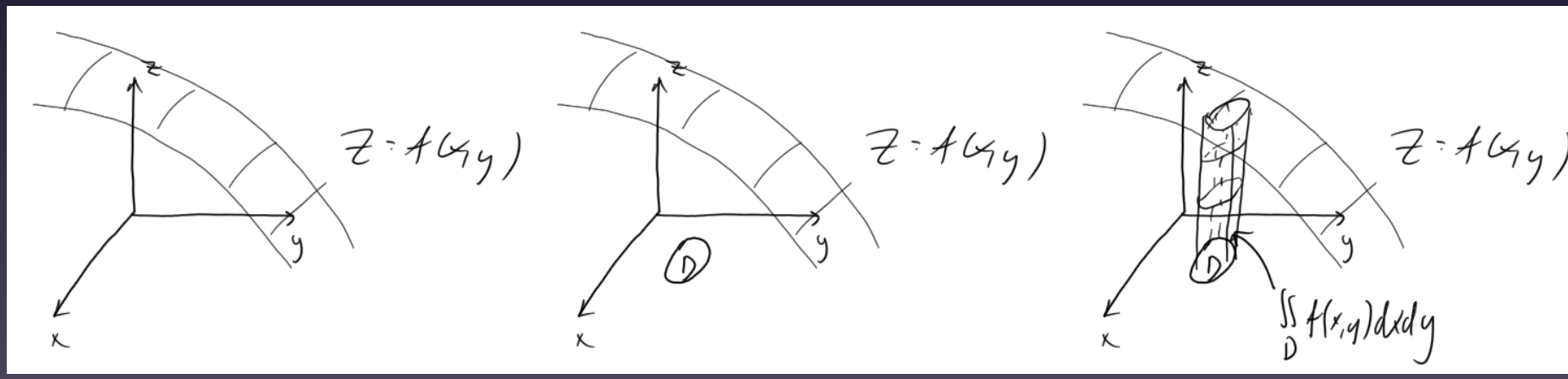
- Całkę pojedynczą $\int_a^b f(x)dx$ interpretujemy jako pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f i osią OX.
- $\int_a^b f(x)dx$ (dla nieujemnej funkcji f) to pole obszaru $\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Interpretacja całki podwójnej:

- Wykresem funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ jest dwuwymiarowa powierzchnia w trójwymiarowej przestrzeni.
- Interesuje nas obszar ograniczony tą powierzchnią i płaszczyzną xOy:
- Jeśli $f(x, y)$ jest funkcją nieujemną, to całkę podwójną $\iint_D f(x, y)dxdy$ interpretujemy jako objętość bryły

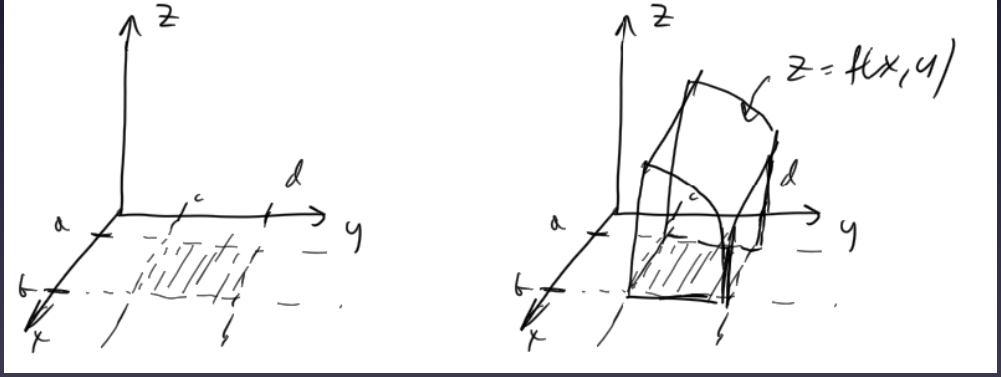
$$\{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$



Jak obliczyć całkę podwójną?

- Podstawa bryły może mieć bardzo różny kształt. Zaczniemy od sytuacji, gdy jest to prostokąt.
- Chcemy ustalić objętość bryły:

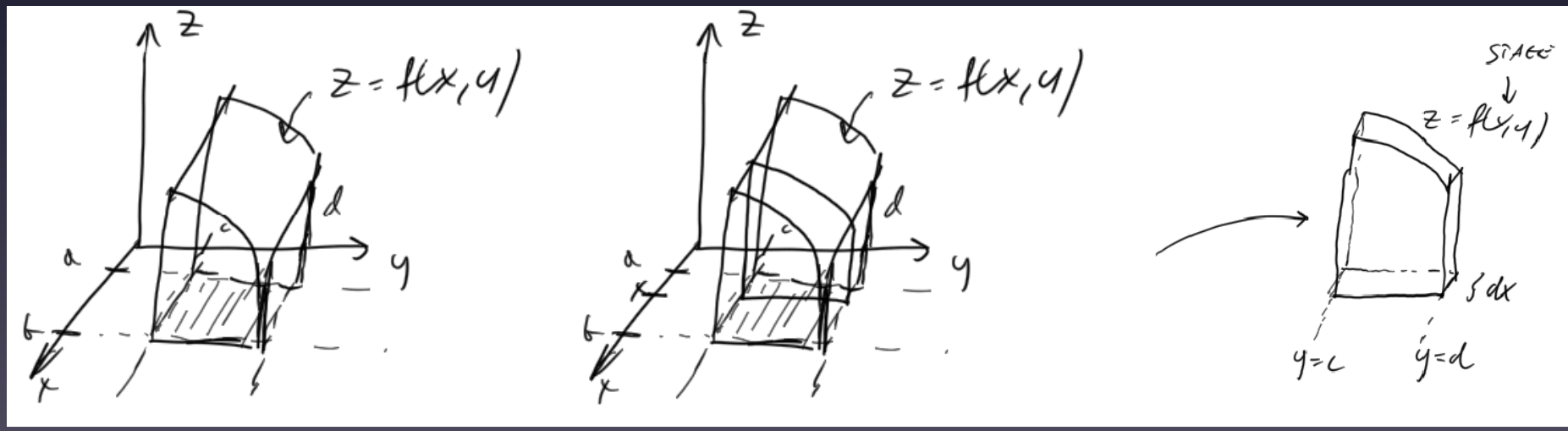
$$\{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq x \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$



Całka podwójna po prostokącie

- Ustalmy x z przedziału $[a, b]$ i wytnijmy z bryły „plaster” o bardzo małej grubości dx równoległy do osi OY:
- Przednia ściana tego wycinka to płaski obszar ograniczony krzywą $z = f(x, y)$ i prostymi $z = 0, y = c, y = d$, więc powierzchnia tej ściany to $\int_c^d f(x, y)dy$.
- Grubość tego wycinka wynosi dx, więc jego objętość to

$$\left(\int_c^d f(x, y)dy\right) \cdot dx.$$



Całka podwójna po prostokącie

- W takim razie objętość całej bryły dostaniemy, całkując powyższe wyrażenie względem x od a do b, dostając

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

- Zauważmy, że całka a nawiasie jest względem y, a całka zewnętrzna względem x, dlatego będziemy często pisać

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \right) dx$$

Całka podwójna po prostokącie

- Mogliśmy zamiast tego robić wycinki równoległe do osi OX, dostając wyrażenie

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

- **Twierdzenie:** Jeśli funkcja f jest odpowiednio regularna, to całkę podwójną z f po obszarze $D = [a,b] \times [c,d]$ można obliczyć za pomocą *całek iterowanych:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dy \right) dx$$

Całka podwójna po prostokącie — przykłady

- Obliczmy całkę $\iint_D x^2y^3dxdy$, gdzie $D = [0,3] \times [1,2]$.
- W myśl wzorów z poprzedniego slajdu

$$\iint_D x^2y^3dxdy = \int_{x=0}^{x=3}\left(\int_{y=1}^{y=2} x^2y^3dy\right)dx =$$
$$= \int_{y=1}^{y=2}\left(\int_{x=0}^{x=3} x^2y^3dx\right)dy.$$

- W ramach przykładu obliczymy całkę w obu kolejnościach i przekonamy się, że wynik jest ten sam.

Całka podwójna po prostokącie — przykłady

- Obliczmy całkę iterowaną

$$\int_{x=0}^{x=3} \left(\int_{y=1}^{y=2} x^2 y^3 dy \right) dx$$

- Zacznijmy od wyrażenia w nawiasie:

$$\int_{y=1}^{y=2} x^2 y^3 dy = x^2 \int_{y=1}^{y=2} y^3 dy = x^2 \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_{y=1}^{y=2} =$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 \right) = \frac{15}{4} x^2.$$

Całka podwójna po prostokącie — przykłady

- Dalej liczymy całkę iterowaną

$$\int_{x=0}^{x=3} \left(\int_{y=1}^{y=2} x^2 y^3 dy \right) dx$$

- Wiemy już, że w nawiasie jest tak naprawdę $\frac{15}{4}x^2$, zatem nasza całka przybiera postać

$$\int_{x=0}^{x=3} \left(\int_{y=1}^{y=2} x^2 y^3 dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=3} \left(\frac{15}{4} x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{15}{4} \int_{x=0}^{x=3} x^2 dx = \frac{15}{4} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^3 = \frac{5 \cdot 27}{4}.$$

Całka podwójna po prostokącie — przykłady

- Teraz obliczmy całkę iterowaną

$$\int_{y=1}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=3} x^2 y^3 dx \right) dy$$

- Zacznijmy od wyrażenia w nawiasie:

$$\int_{x=0}^{x=3} x^2 y^3 dx = y^3 \int_{x=0}^{x=3} x^2 dx = y^3 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=3} =$$

$$= y^3 \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = \frac{27}{3} y^3 = 9y^3.$$

Całka podwójna po prostokącie — przykłady

- Dalej liczymy całkę iterowaną

$$\int_{y=1}^{y=2}\left(\int_{x=0}^{x=3} x^2y^3dx\right)dy$$

- Wiemy już, że w nawiasie jest tak naprawdę $9y^3$, zatem nasza całka przybiera postać

$$\int_{y=1}^{y=2}\left(\int_{x=0}^{x=3} x^2y^3dx\right)dy = \int_{y=1}^{y=2}\left(9y^3\right)dy =$$

$$= 9\int_{y=1}^{y=2} y^3dy = 9\left[\frac{1}{4}y^4\right]_{y=1}^{y=2} = 9\cdot\frac{1}{4}\cdot(2^4-1) = \frac{9\cdot 15}{4} = \frac{27\cdot 5}{4}.$$

Całka podwójna po prostokącie — przykłady

- Obliczmy całkę $\iint_D ye^{xy}\,dxdy$, gdzie $D = [0,1] \times [0,2]$.
- Też porównamy zachowanie całki w obu kolejnościach. Najpierw spróbujmy tak:

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=2} ye^{xy}\,dy \right) dx$$

- Pracowicie obliczając całkę wewnętrzną przez częsci, dostaniemy

$$\int_{y=0}^{y=2} ye^{xy}\,dy = \frac{1}{x^2} + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^{2x}$$

- Nie umiemy tego scałkować względem x...

Całka podwójna po prostokącie — przykłady

- Obliczmy naszą całkę w odwrotnej kolejności:

$$\int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} ye^{xy}\,dx \right) dy$$

- Tym razem całka wewnętrzna ma postać

$$\int_{x=0}^{x=1} ye^{xy}\,dx = [e^{xy}]_{x=0}^{x=1} = e^{1\cdot y} - e^{0\cdot y} = e^y - 1.$$

- W takim razie dalej mamy

$$\int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} ye^{xy}\,dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=2} (e^y - 1)\,dy =$$

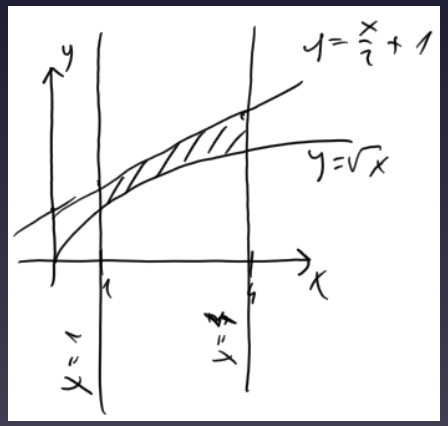
$$= [e^y - y]_{y=0}^{y=2} = e^2 - 2 - e^0 + 0 = e^2 - 3.$$

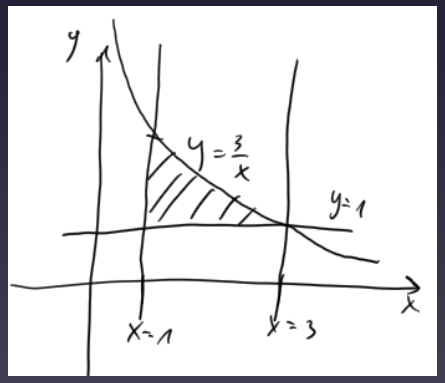
Obszary normalne

- Pozbiór płaszczyzny D nazywamy *obszarem normalnym względem osi OX*, jeśli ma postać

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq g(x)\}$$

- Innymi słowy obszar jest z lewej i prawej strony ograniczony prostymi pionowymi, a z góry i z dołu jest ograniczony wykresami pewnych funkcji zmiennej x.



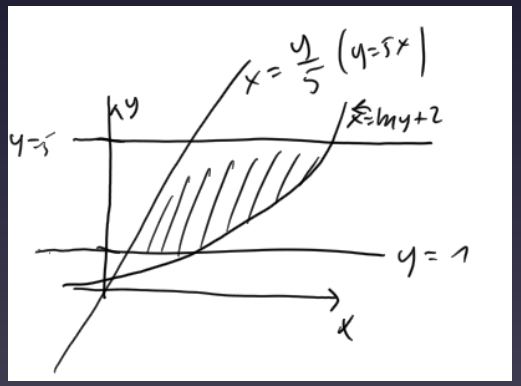


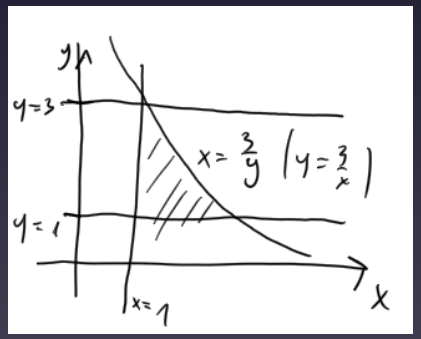
Obszary normalne

- Pozbiór płaszczyzny D nazywamy *obszarem normalnym względem osi OY*, jeśli ma postać

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, l(y) \leq x \leq p(y)\}$$

- Innymi słowy obszar jest z góry i z dołu ograniczony prostymi poziomymi, a z lewej i prawej strony jest ograniczony wykresami pewnych funkcji zmiennej y.





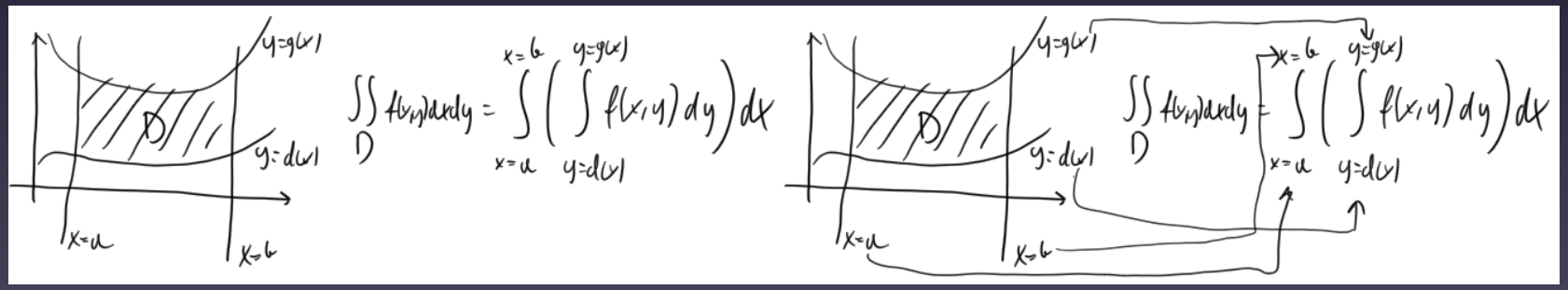
Obliczanie całek po obszarach normalnych

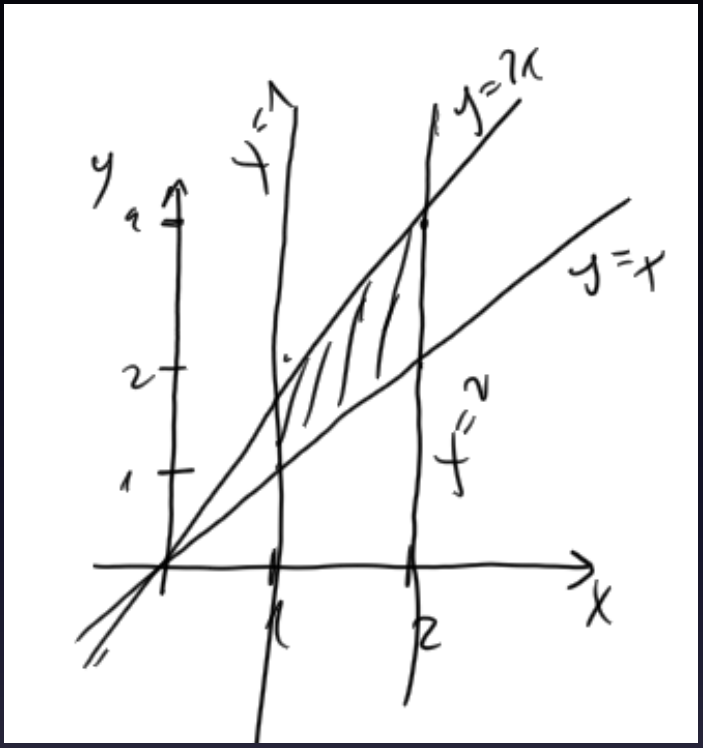
- Załóżmy, że D jest *obszarem normalnym względem osi* OX, czyli

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq g(x)\}$$

- Wtedy

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=d(x)}^{y=g(x)} f(x, y)dy \right) dx$$



- Przykład: obliczmy $\iint_D \frac{x}{x+y} dxdy$, gdzie $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2; x \leq y \leq 2x\}$.
- 

- Obszar jest normalny względem osi OX, więc możemy liczyć tak:

$$\iint_D \frac{x}{x+y} dxdy = \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=x}^{y=2x} \frac{x}{x+y} dy \right) dx.$$

- Z poprzedniego slajdu wyszło nam, że musimy obliczyć:

$$\iint_D \frac{x}{x+y} dxdy = \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=x}^{y=2x} \frac{x}{x+y} dy \right) dx.$$

- Obliczmy wyrażenie w nawiasie. $\int \frac{x}{x+y} dy = x \ln(x+y)$, więc

$$\int_{y=x}^{y=2x} \frac{x}{x+y} dy = [x \ln(x+y)]_{y=x}^{y=2x} =$$

$$= x \ln(x+2x) - x \ln(x+x) = x \ln 3x - x \ln 2x =$$

$$= x(\ln 3x - \ln 2x) = x \ln \frac{3x}{2x} = x \ln \frac{3}{2}.$$

- Stąd już łatwo

$$\iint_D \frac{x}{x+y} dxdy = \int_{x=1}^{x=2} x(\ln \frac{3}{2}) dx = (\ln \frac{3}{2}) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

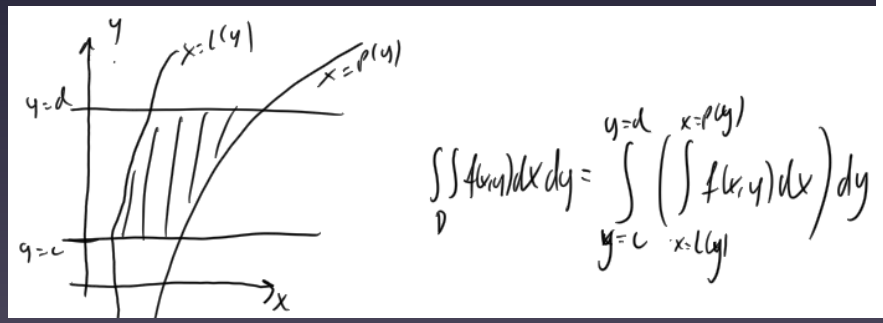
Obliczanie całek po obszarach normalnych

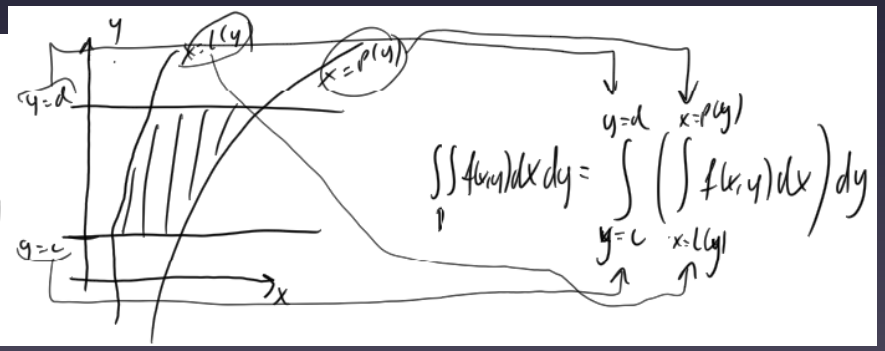
- Załóżmy, że D jest *obszarem normalnym względem osi* OY, czyli

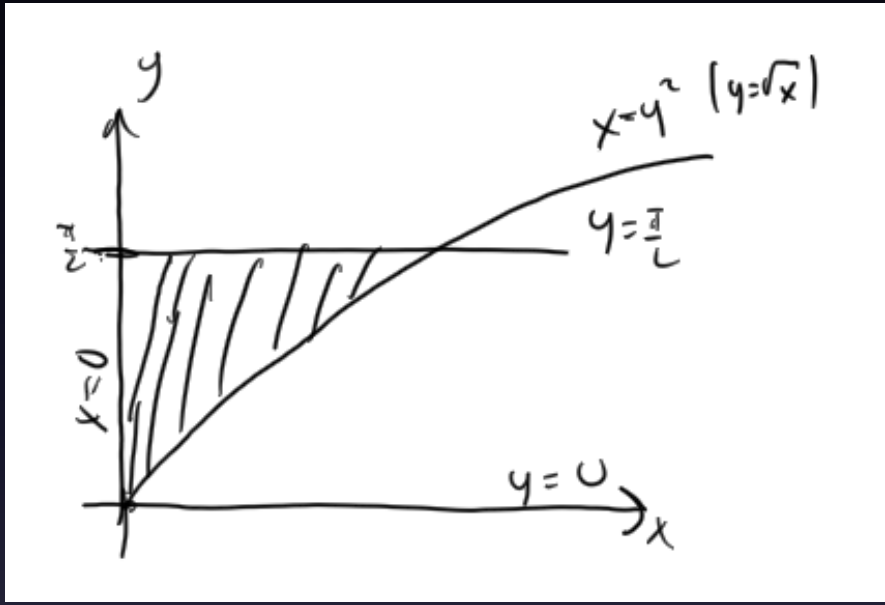
$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, l(y) \leq x \leq p(y)\}$$

- Wtedy

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=l(y)}^{x=p(y)} f(x, y)dx \right) dy$$





- Przykład: obliczmy $\iint_D \cos\frac{x}{y}$, gdzie $D = \{(x,y) : 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; 0 \le x \le y^2\}$.
-


- Obszar jest normalny względem osi OY, więc możemy liczyć tak:

$$\iint_D \cos\frac{x}{y}\,dxdy = \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{x=0}^{x=y^2} \cos\frac{x}{y}\,dx \right) dy.$$

- Z poprzedniego slajdu wyszło nam, że musimy obliczyć:

$$\iint_D \cos\frac{x}{y}dxdy = \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{x=0}^{x=y^2} \cos\frac{x}{y}dx \right) dy.$$

- Obliczmy wyrażenie w nawiasie. $\int \cos\frac{x}{y}dx = y\sin\frac{x}{y}$, więc

$$\int_{x=0}^{x=y^2} \cos\frac{x}{y}dx = \left[y\sin\frac{x}{y} \right]_{x=0}^{x=y^2} =$$

$$= y\sin\frac{y^2}{y} - 0 = y\sin y.$$

- Stąd już łatwo

$$\iint_D \cos\frac{x}{y}dxdy = \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} y\sin y dy =$$

$$= [\sin y - y\cos y]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = (1 - \frac{\pi}{2}\cdot 0) - (0 - 0) = 1.$$

Bardziej zwięzły zapis całek podwójnych:

Zamiast pisać np.

$$\int_{x=1}^{x=4} \left(\int_{y=x}^{y=x^3} \cos(xy)dy \right) dx$$

często piszemy

$$\int_{1}^{4} \left(\int_{x}^{x^3} \cos(xy)dy \right) dx$$

lub

$$\int_{1}^{4} dx \int_{x}^{x^3} \cos(xy)dy.$$

Kilka przydatnych właściwości całek podwójnych:

- Jeśli $f(x,y)$ i $g(x,y)$ są dowolnymi funkcjami, a $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\iint_D (a \cdot f(x,y) + b \cdot g(x,y))dxdy =$$

$$= a \iint_D f(x,y)dxdy + b \iint_D g(x,y)dxdy.$$

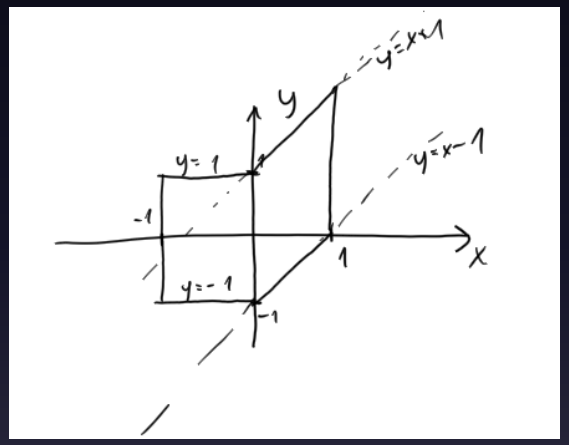
- Jeśli $f(x,y)$ jest dowolną funkcją, a D_1, D_2 są *rozłącznymi* obszarami, to

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Całkowanie po obszarach, które nie są normalne:

- Jeśli obszar całkowania nie jest normalny, to dzielimy go na *rozłączne* obszary normalne (praktycznie zawsze jest to możliwe) i liczymy całkę po każdym z nich osobno.
- Przykład: jeśli obszar D wygląda jak na rysunku niżej...



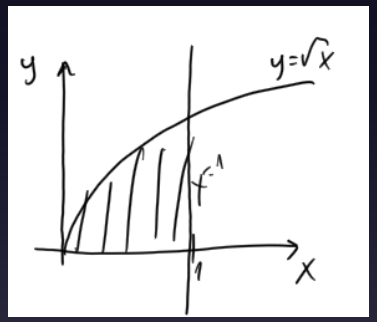
- ...to

$$\iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{-1}^{1} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{x+1} f(x,y)dy.$$

Obszary normalne względem obu osi

- Spójrzmy na przykład na obszar $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
- Prosto z jego opisu widać, że jest ograniczony z lewej prostą $x = 0$, z prawej prostą $x = 1$, z dołu krzywą (prostą) $y = 0$, a z góry krzywą $y = \sqrt{x}$:

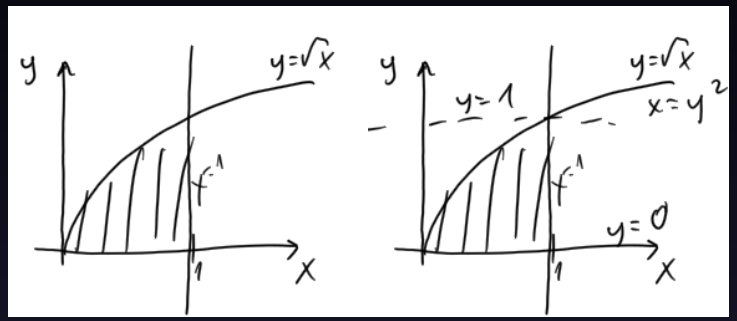


- Wobec tego

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f(x, y)dy \right) dx.$$

Obszary normalne względem obu osi

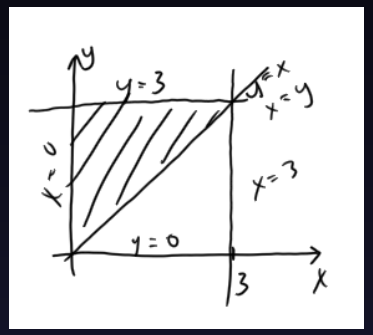
- Spójrzmy jeszcze raz na zbiór z poprzedniego slajdu



- Krzywą $y = \sqrt{x}$ możemy równie dobrze potraktować jako lewy, a nie górny, brzeg obszaru,i zapisać jej równanie wzorem $x = y^2$. Z tego punktu widzenia obszar jest ograniczony z góry prostą $y = 1$, z dołu prostą $y = 0$, z lewej krzywą $x = y^2$, a z prawej krzywą (prostą) $x = 1$.
- W takim razie

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=y^2}^{x=1} f(x,y)dx \right) dy.$$

- Przykład: obliczyć $\int_0^3 dx \int_x^3 \sqrt{y^2+16}dy$.
- Całka nieoznaczona $\int \sqrt{y^2+16}dy$ jest dość trudna.
- Narysujmy obszar całkowania:



- W takim razie naszą całkę możemy równoważnie zapisać jako

$$\int_{y=0}^{y=3} \left(\int_{x=0}^{x=y} \sqrt{y^2+16}dx \right) dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=3} y\sqrt{y^2+16}dy = \left[\frac{1}{3}(y^2+16)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{61}{3}.$$