# Wstęp do topologii

**Rozwiązania wybranych zadań z listy 4**

2. Wykazać, że każda przestrzeń metryczna jest homeomorficzna z pewną przestrzenią metryczną ograniczoną.

   **Rozwiązanie:** Niech $(X, d)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną. Określmy na $X$ nową metrykę wzorem $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ (warto sprawdzić, że to faktycznie jest metryka). Przestrzeń metryczna $(X, d')$ jest ograniczona, bo żadne dwa punkty nie są w odległości $d'$ większej niż 1. Pokażemy, że przestrzenie $(X, d)$ i $(X, d')$ są homeomorficzne, a konkretnie pokażemy, że homeomorfizmem miedzy nimi jest odwzorowanie tożsamościowe $F(x) = x$. Ewidentnie jest to odwzorowanie odwracalne (i jest samo swoim odwzorowaniem odwrotnym), więc musimy tylko sprawdzić jego ciągłość w obie strony.

   Pokażmy najpierw, że odwzorowanie $F : (X, d) \to (X, d')$ jest ciągłe. Zauważmy, że dla każdych $x, y \in X$ mamy

   $$d'(F(x), F(y)) = d'(x, y) \leq d(x, y),$$

   czyli $F$ spełnia warunek Lispchitza ze stałą 1, a więc jest ciągłe.

   Teraz spójrzmy na odwzorowanie odwrotne z $(X, d')$ w $(X, d)$ (którym też jest $F(x) = x$). Tu oczywiście warunek Lipschitza zachodzić nie musi, więc pokażemy ciągłość bezpośrednio, korzystając z definicji Cauchy'ego. Ustalmy zatem $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Musimy znaleźć taką $\delta > 0$, żę warunek $d'(x, y) < \delta$ będzie implikował $d(x, y) < \varepsilon$. Jeśli $\varepsilon < 1$, to niech $\delta = \varepsilon$ i wtedy warunek $d'(x, y) < \delta$ implikuje, że $d(x, y) = d'(x, y) < \delta = \varepsilon$. Jeśli $\varepsilon \geq 1$, to niech $\delta = 1$. Wtedy jeśli $d'(x, y) < \delta$, to $d(x, y) = d'(x, y) < 1 \leq \varepsilon$, więc też żądana nierówność jest spełniona.

3. Udowodnić, że jeśli $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest homeomorfizmem przestrzeni metrycznej $(X, d_X)$ na przestrzeń metryczną $(Y, d_Y)$, to

   (a) obraz zbioru gęstego w $X$ jest gęsty w $Y$,

   (b) obraz zbioru nigdziegęstego w $X$ jest nigdziegęsty w $Y$,

   (c) obraz zbioru brzegowego w $X$ jest brzegowy w $Y$.

   **Rozwiązanie:**

   (a) Jeśli zbiór $A$ jest gęsty w $X$, to znaczy, że dla każdego $x \in X$ istnieje ciąg $(a_n)$ elementów $A$ zbieżny do $x$. Niech teraz $y \in Y$. Istnieje taki $x \in x$, że $f(x) = y$. Z gęstości $A$ istnieje ciąg $(a_n)$ elementów $A$, taki że $a_n \to x$. W takim razie jednak (z ciągłości) $f(a_n) \to f(x) = y$, więc pokazaliśmy, ze dla każdego $y \in Y$ istnieje ciąg punktów z $f(A)$ zbieżny do $y$, a to oznacza, że $f(A)$ jest zbiorem gęstym.

   (b) Jeśli $A$ jest zbiorem nigdziegęstym w $X$, to $\overline{A}$ jest zbiorem brzegowym, a więc (z następnego punktu) $f(\overline{A})$ jest zbiorem brzegowym w $Y$. Jeśli pokażemy, że $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, to będzie znaczyło, że $f(A)$ jest zbiorem nigdziegęstym. A co z tym ostatnim faktem? Wiemy, że $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, bo to jest prawdą dla każdego odwzorowania ciągłego, więc pozostaje tylko druga inkluzja. Załóżmy, że $y \in \overline{f(A)}$ i niech $x = f^{-1}(y)$. Istnieje taki ciąg $(b_n)$ elementów $f(A)$, że $b_n \to y$. Niech $a_n = f^{-1(b_n)}$. Ponieważ $f^{-1}$ jest odwzorowaniem ciągłym, to $a_n = f^{-1}(b_n) \to f^{-1}(y) = x$. Ponadto $a_n \in A$, zatem $x \in \overline{A}$, czyli $y \in f(\overline{A})$.

(c) Skorzystamy z faktu, że zbiór jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnej kuli. Niech $A$ będzie zbiorem brzegowym w $X$. Gdyby $f(A)$ nie był zbiorem brzegowym w $Y$, to istniałby $y \in Y$ i $\varepsilon > 0$, takie że kula otwarta $B(y, \varepsilon)$ byłaby podzbiorem $f(A)$. W takim razie jednak $f^{-1}(B(y, \varepsilon))$ jest zbiorem otwartym (bo $f$ jest ciągłe) i jest podzbiorem $A$ (bo $f$ jest odwracalne, a bierzemy tylko przeciwobrazy punktów z $f(A)$. W takim razie $A$ ma niepuste wnętrze, co jest sprzeczne z założeniem.

**Uwaga:** żadna z tych trzech właściwości nie zachodzi, gdy $f$ jest odwzorowaniem ciągłym bez dodatkowych założeń, ale kontrprzykłady pozostawiam na razie do samodzielnego przemyślenia.

5. Czy podane pary przestrzeni metrycznych są homeomorficzne?

- Odcinek $(0, 1)$ z metryką euklidesową oraz $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową.

  **Rozwiązanie:** Tak, homeomorfizmem jest np. $f(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$. Wtedy odwzorowaniem odwrotnym jest $g(y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}$, a obie te funkcje są ciąłe.

- Odcinek $[0, 1]$ z metryką euklidesową oraz $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową.

  **Rozwiązanie:** Nie. Gdyby $f$ było homeomorfizmem $[0, 1]$ na $\mathbb{R}$, to w szczególności byłoby funkcją ciągłą na $[0, 1]$. Wiemy z analizy, że funkcja ciągła na odcinku domkniętym osiąga na nim wartość minimalną i maksymalną. Jeśli oznaczymy je odpowiednio przez $a$ i $b$, to mamy $f([0, 1]) = [a, b]$, a powinno być $f([0, 1]) = \mathbb{R}$.

- $\mathbb{Z}$ z metryką dyskretną i $\mathbb{R}$ z metryką dyskretną.

  **Rozwiązanie:** Nie (i z żadną inną metryką też nie). Homeomorfizm jest bijekcją, więc jeśli dwie przestrzenie są homeomofriczne, to mają taką samą liczność. Tymczasem $\mathbb{Z}$ jest zbiorem przeliczalnym, a $\mathbb{R}$ nie.

- $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ z metryką euklidesową oraz $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ z metryką euklidesową.

  **Rozwiązanie:** Nie. Oznaczmy $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $Y = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ i pokażemy, że nie ma żadnego ciągłego, różnowartościowego odwzorowania z $Y$ w $X$. Istotnie, załóżmy że $f$ jest odwzorowaniem ciągłym z $Y$ w $X$ i niech $y_n = \frac{1}{n}$. Ciąg $(y_n)$ jest zbieżny do 0, więc ciąg $(f(y_n))$ powinien być zbieżny do $f(0)$. Ale jedynymi ciągami zbieżnymi w przestrzeni $X$ są ciągi stałe od pewnego miejsca (**dlaczego?**), tymczasem wszystkie wyrazy ciągu $((f(y_n)))$ są różne, więc nie może on być zbieżny.

6. Niech $d$ będzie metryką euklidesową na $\mathbb{R}$. Czy funkcja $f : (X, d) \to (Y, d)$ dla $X = [0, 1) \cup \{2\}$ i $Y = [0, 1]$ dana wzorem $f(x) = x$ dla $x \in [0, 1)$ i $f(2) = 1$ jest homeomorfizmem?

**Rozwiązanie:** Funkcja $f$ jest oczywiście wzajemnie jednoznaczna i można łatwo sprawdzić, że jest ciągła (co akurat nie będzie dla nas istotne). Funkcja odwrotna zadana jest wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 2 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Funkcja $g$ nie jest ciągła, bo jeśli położymy $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, to ciąg $y_n$ jest zbieżny do 1 w przestrzeni $Y$, tymczasem ciąg $g(y_n) = 1 - \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny w przestrzeni $X$ (byłby zbieżny do 1, ale 1 nie należy do przestrzeni $X$).