Wykład IV-V: Wielomiany

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

28 październik 2020

Wielomian

Definicja

Wielomianem rzeczywistym (zespolonym) stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : R \longrightarrow R$ ($W : C \longrightarrow C$) określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_k \in R$ ($a_k \in C$) dla $0 \leqslant k \leqslant n$ oraz $a_n \neq 0$. Ponadto przyjmujemy, że funkcja $W(x) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$. Liczby a_k, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, nazywamy współczynnikami wielomianu W

Podzielność wielomianów

Definicja

Mówimy, że wielomian I jest ilorazem, a wielomian R resztą z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli dla każdego $x \in \mathrm{R}$ ($x \in \mathrm{C}$) spełniony jest warunek

$$P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x)$$

oraz stopień reszty R jest mniejszy od stopnia dzielnika Q. Jeżeli $R(x) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian P jest podzielny przez wielomian Q

Przykłady

Obliczyć ilorazy i reszty powstałe z dzielenia podanych wielomianów:

- $P(x) = 8x^4 + 3x^2 + 5x - 6, \;\; Q(x) = x - 1$
- $P(x) = x^3 + 27, \;\; Q(x) = x^2 - 3x + 9$
- $P(z) = iz^3 + 2z - 1 + 3i, \;\; Q(z) = z - 2i$

Pierwiastek wielomianu

Definicja

Liczbę rzeczywistą (zespoloną) nazywamy pierwiastkiem rzeczywistym (zespolonym) wielomianu W, jeżeli

$$W(x_0) = 0$$

Przykłady

Nie wykonując działań obliczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli:

- $P(x) = x^{100} + 4x^2 + 1, \;\; Q(x) = x^2 - 1$
- $P(x) = x^{2022} + x^{2021} + 2020, \;\; Q(x) = x^2 + 1$

Twierdzenie Bézouta

Twierdzenie

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wiełomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)P(x)$$

Uwagi: Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - x_0$ jest równa $W(x_0)$. Jeżeli znany jest jeden z pierwiastków wielomianu W stopnia $n > 1$, (np. x_0), to pozostałe jego pierwiastki są pierwiastkami wielomianu $\frac{W(x)}{x - x_0}$ stopnia $n - 1$

Przykłady

Znając jeden z pierwiastków podanych wielomianów znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

- $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, \;\; x_1 = -1$
- $W(z) = z^3 + 5ix^2 - 7z - 3i, \;\; z_1 = -3i$

Pierwiastek wielokrotny wielomianu

Definicja

Liczba x_0 jest pierwiastkiem k - krotnym wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k P(x) \qquad \text{oraz} \qquad P(x_0) \neq 0$$

Jeżeli x_1 jest k_1 - krotnym pierwiastkiem, x_2 jest k_2 - krotnym pierwiastkiem, ..., x_m jest k_m - krotnym pierwiastkiem wielomianu, to wielomian ten jest podzielny przez iloczyn

$$(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_m)^{k_m}$$

Przykłady

Znaleźć krotności pierwiastków podanych wielomianów:

- $W(x) = x^5 - 4x^3, \;\; x_0 = 0$
- $W(x) = x^4 - 4x^2 + 4, \;\; x_0 = \sqrt{2}$
- $W(z) = (z^2 + 1)^4, \;\; z_0 = -i$

O pierwiastkach całkowitych wielomianu

Twierdzenie

Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych oraz niech liczba całkowita $p \neq 0$ będzie pierwiastkiem wielomianu W. Wtedy p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0

Wielomian o współczynnikach całkowitych może nie mieć pierwiastków całkowitych np. $x^2 - 3$, $x^2 + 1$

Przykłady

Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

- $W(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$
- $W(x) = 4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - x - 2$

O pierwiastkach wymiernych wielomianu

Twierdzenie

Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach całkowitych oraz niech liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, będzie pierwiastkiem wielomianu W. Wtedy p jest dzielnikiem współczynnika a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n tego wielomianu

Jeżeli $a_n = 1$, to wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu są całkowite

Przykłady

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

- $W(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2x + 5$
- $W(x) = 24x^3 - 10x^2 - 3x + 1$
- $W(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$

Pierwiastki trójmianu kwadratowego

Fakt

Wielomian zespolony $W(z) = az^2 + bz + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$, ma dwa pierwiastki zespolone:

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

gdzie $\Delta = \delta^2 = b^2 - 4ac$

Pierwiastki trójmianu kwadratowego

Dla współczynników rzeczywistych

Dla współczynników rzeczywistych a, b, c możliwe są trzy przypadki:

- jeżeli $\Delta > 0$, to wielomian W ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste
- jeżeli $\Delta = 0$, to wielomian W ma jeden pierwiastek rzeczywisty dwukrotny $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$
- jeżeli $\Delta < 0$, to wielomian W nie ma pierwiastków rzeczywistych, ma natomiast dwa pierwiastki zespolone z_1, z_2 spełniające związek $z_1 = \overline{z_2}$

Przykłady

Znaleźć pierwiastki podanych trójmianów kwadratowych:

- $W(x) = x^2 - 2x + 2$
- $W(z) = z^2 + (2 - i)z + 3 - i$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie

Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony

O przedstawianiu wielomianu w postaci iloczynu dwumianów

- Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in \mathrm{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne)
- Niech wielomian W stopnia n ma pierwiastki zespolone z_i o krotnościach odpowiednio k_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $k_l + k_2 + ... + k_m = n$. Wtedy

$$W(z) = c_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}...(z - z_m)^{k_m}$$

gdzie c_n jest współczynnikiem przy z^n w wielomianie W

O pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego

O pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego

Niech W będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest k - krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\overline{z_0}$ jest k - krotnym pierwiastkiem tego wielomianu

Przykłady

Znając jeden z pierwiastków podanych wielomianów rzeczywistych znaleźć pozostałe pierwiastki tych wielomianów:

- $W(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10, \quad x_1 = 1 + 2i$
- $W(x) = x^4 + bx^2 + c, \quad x_1 = 2 - i, \quad \text{gdzie } b, c \in \mathrm{R}$

O rozkładzie wielomianu rzeczywistego

Twierdzenie

Niech W będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych. Ponadto niech x_i będą pierwiastkami rzeczywistymi tego wielomianu o krotności k_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant r$ oraz z_i, $\overline{z_i}$ będą pierwiastkami zespolonymi tego wielomianu o krotności l_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant s$, przy czym $(k_1 + \ldots + k_r) + 2(l_1 + \ldots + l_s) = n$. Wtedy

$$W(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s},$$

gdzie $p_i = -2 Re\, z_i$ oraz $q_i = |z_i|^2$, a a_n jest współczynnikiem wielomianu W przy x^n

Z powyższego twierdzenia wynika, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty

Przykłady

Podane wielomiany przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych nierozkładalnych:

- $W(x) = x^3 - 8$
- $W(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
- $W(x) = x^4 + 16$
- $W(x) = x^6 + 27$

Przykłady

Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

- liczby 1, -5, $-\sqrt{2}$ oraz $1-3i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu
- liczba $1+i$ jest pierwiastkiem pojedynczym, liczby $-i$ oraz 3 są pierwiatkami podwójnymi, a liczba $3i$ jest pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu

Funkcja wymierna

Funkcja wymierna

Funkcją wymierną rzeczywistą (zespoloną) nazywamy iloraz dwóch wielomianów rzeczywistych (zespolonych), przy czym dzielnik nie jest wielomianem zerowym

Funkcja wymierna właściwa

Funkcję wymierną nazywamy właściwą, jeżeli stopień wielomianu w liczniku ułamka określającego tę funkcję jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku

Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej

Przykłady

Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

- $\frac{x^4+4x^2+1}{x^2+2}$
- $\frac{x^5+x}{x^3+1}$

Rzeczywiste ułamki proste

Definicja

- Rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci
$$\frac{A}{(x+a)^n},$$
gdzie $a, A \in \mathrm{R}$ oraz $n \in N$
- Rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci
$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$
gdzie $A, B, p, q \in \mathrm{R}$ oraz $n \in N$, przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$

O rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie

Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista (zespolona) jest sumą rzeczywistych (zespolonych) ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. Rzeczywista funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_l + k_2 + \ldots + k_r$ rzeczywistych ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1 + l_2 + \ldots + l_s$ rzeczywistych ułamków prostych drugiego rodzaju

O rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste

Twierdzenie cd.

- czynnikowi $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_1}{x - x_i} + \frac{A_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{k_i}}{(x - x_i)^{k_i}},$$

  gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_{k_i} \in \mathrm{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant r$

- czynnikowi $(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \ldots + \frac{B_{l_j} x + C_{l_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}},$$

  gdzie $B_1, \ldots, B_{l_j}, C_1, \ldots, C_{l_j} \in \mathrm{R}$ dla $1 \leqslant j \leqslant s$

Przykłady

Napisać ogólny rozkład podanych rzeczywistych funkcji wymiernych na rzeczywiste ułamki proste pierwszego lub drugiego rodzaju (nie obliczać współczynników):

- $\frac{3x}{(x^2+1)^2(x^2-9)}$
- $\frac{x^7+x^6+x^5}{(x^2+2x+3)^2(x^2-4)^2}$

Przykłady

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych pierwszego lub drugiego rodzaju:

- $\frac{10x+3}{x^3+27}$
- $\frac{2x^2-6x-9}{x^4+6x^3+9x^2}$