Wykład VI-VII: Macierze i wyznaczniki

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

18 listopad 2020

Macierz

Definicja

Macierzą rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Element macierzy A stojący w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie oznaczamy przez a_{ij}. Macierze A i B są równe, gdy mają te same

Rodzaje macierzy

Rodzaje macierzy

- Macierz zerowa: $0_{m\times n}$ - macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0
- Macierz kwadratowa - liczba wierszy równa się liczbie kolumn, liczbę wierszy (kolumn) nazywamy stopniem macierzy kwadratowej. Elementy macierzy, które mają ten sam numer wiersza co kolumny, tworzą przekątną główną

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rodzaje macierzy

Rodzaje macierzy

- Macierz trójkątna dolna: - macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0
- Macierz trójkątna górna: - macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy stojące pod główną przekątną są równe 0
- Macierz diagonalna: macierz kwadratowa stopnia n, w której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0

Rodzaje macierzy

Rodzaje macierzy

- Macierz jednostkowa: macierz diagonalna stopnia n, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1. Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy przez I_n

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Suma i różnica macierzy

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. Sumą (różnicą) macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$, której elementy są określone wzorem:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Piszemy wtedy $C = A \pm B$

Iloczyn macierzy przez liczbę

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Iloczynem macierzy A przez liczbę α nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Piszemy wtedy $B = \alpha A$

Działania na macierzach

Własności działań na macierzach

Niech A, B, C będą dowolnymi macierzami rzeczywistymi (zespolonymi) tego samego wymiaru oraz niech α, β będą liczbami rzeczywistymi (zespolonymi). Wtedy

- $A + B = B + A$ $\qquad A + 0 = 0 + A = A$
- $A + (-A) = 0$ $\qquad A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ $\qquad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $1 \cdot A = A$ $\qquad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Przykłady

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

rozwiązać równanie

$$3(A + X) + 5(3X + B) = A - B$$

Działania na macierzach

Iloczyn macierzy

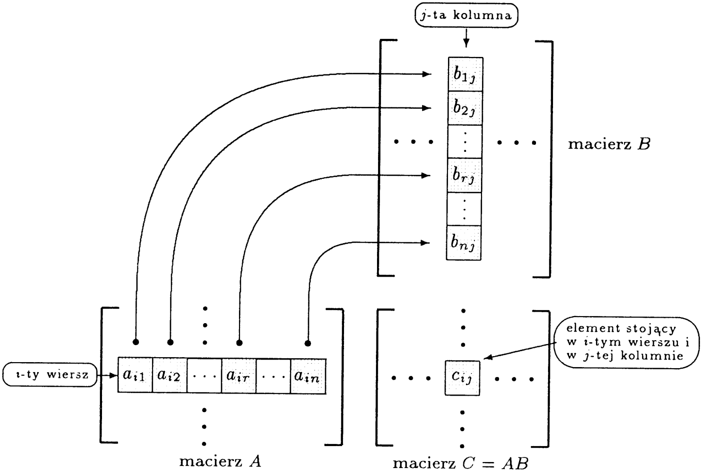
Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ wymiar $n \times k$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant k$. Piszemy wtedy $C = AB$

Uwaga. Element c_{ij} iloczynu macierzy A i B otrzymujemy sumując iloczyny odpowiadających sobie elementów i - tego wiersza macierzy A i j - tej kolumny macierzy B. Iloczyn macierzy A i B można obliczyć tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A równa się liczbie wierszy macierzy B

Schemat obliczania iloczynu macierzy



Przykłady

Obliczyć iloczyny AB i BA dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Własności iloczynu macierzy

- Niech macierz A ma wymiar $m \times n$, a macierze B i C wymiar $n \times k$. Wtedy $A(B + C) = AB + AC$
- Niech macierze A, B mają wymiar $m \times n$, a macierz C wymiar $n \times k$. Wtedy $(A + B)C = AC + BC$
- Niech macierz A ma wymiar $m \times n$, a macierz B wymiar $n \times k$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wtedy
$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$$
- Niech macierz A ma wymiar $m \times n$, macierz B ma wymiar $n \times k$, a macierz C wymiar $k \times l$. Wtedy $(AB)C = A(BC)$
- Niech macierz A ma wymiar $m \times n$. Wtedy $AI_n = I_mA = A$

Przykłady

Rozwiązać równame macierzowe

$$X\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 15 & -12 \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dla podanej macierzy A wyprowadzić wzory ogólne na macierze A^n, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Udowodnić otrzymany wzór za pomocą indukcji matematycznej

Macierz transponowana

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]$ *będzie macierzą wymiaru* $m \times n$. *Macierzą transponowaną do macierzy* A *nazywamy macierz* $B = [b_{ij}]$ *wymiaru* $n \times m$, *której elementy są określone wzorem:*

$$b_{ij} = a_{ji}$$

gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$ *oraz* $1 \leqslant j \leqslant m$. *Macierz transponowaną do macierzy* A *oznaczamy przez* A^T

Uwaga. Przy transponowaniu, kolejne wiersze macierzy wyjściowej stają się kolejnymi kolumnami macierzy transponowanej

Działania na macierzach

Własności transpozycji macierzy

- Niech A i B będą macierzami wymiaru $m \times n$. Wtedy
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
- Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wtedy
$$\left(A^T\right)^T = A \qquad \text{oraz} \qquad (\alpha A)^T = \alpha A^T$$
- Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$, a B macierzą wymiaru $n \times k$. Wtedy
$$(AB)^T = B^T A^T$$
- Niech A będzie macierzą kwadratową oraz niech $n \in \mathrm{N}$. Wtedy
$$(A^n)^T = \left(A^T\right)^n$$

Przykłady

Układając odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze X spełniające podane równania macierzowe

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
- $X \cdot X^T = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Macierz symetryczna i antysymetryczna

Definicja

- *Macierz kwadratowa A jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$A^T = A$$
- *Macierz kwadratowa A jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$A^T = -A$$

Uwaga. Macierz jest symetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej są sobie równe. Macierz jest antysymetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej różnią się tylko znakiern, a elementy głównej przekątnej są równe 0

Własności macierzy symetrycznej i antysymetrycznej

Fakt

- Niech A będzie macierzą kwadratową. Wtedy
  - macierz $A + A^T$ jest symetryczna
  - macierz $A - A^T$ jest antysymetryczna
- Każdą macierz kwadratową można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

- Niech A będzie macierzą dowolnego wymiaru. Wtedy macierze $A^T A$ i $A\,A^T$ są symetryczne

Wyznacznik macierzy

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy rzeczywistej (zespolonej) $A = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę rzeczywistą (zespoloną) $det\ A$. Funkcja ta jest określona wzorem indukcyjnym:

- jeżeli macierz A ma stopień $n = 1$, to
$$det\ A = a_{11}$$
- jeżeli macierz A ma stopień $n \geqslant 2$, to

$$det\ A = (-1)^{1+1} a_{11} det\ A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} det\ A_{12} + \ldots + \\ +(-1)^{1+n} a_{1n} det\ A_{1n}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i - tego wiersza i j - tej kolumny

Reguły obliczania wyznaczników stopnia 2 i 3

Reguła obliczania wyznaczników stopnia drugiego

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Reguła Sarrusa* obliczania wyznaczników stopnia trzeciego

$$\det\left[\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right]\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

Uwaga. Sposób ten nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.

Przykłady

Korzystając z powyższego wzoru obliczyć podane wyznaczniki:

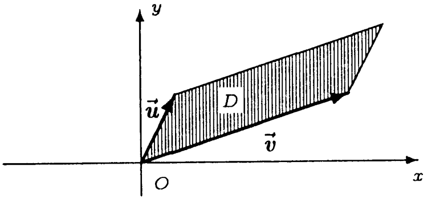
- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$
- $$\begin{vmatrix} i & 1 & 1-i \\ 0 & -2 & 4+3i \\ 2i & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Interpretacja geometryczna wyznaczników 2-go stopnia

Interpretacja geometryczna

- Niech D oznacza równoległobok rozpięty na wektorach $\overrightarrow{u} = (a, b)$, $\overrightarrow{v} = (c, d)$ (rys.) Pole $|D|$ tego równoległoboku wyraża się wzorem:

$$|D| = |det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}|$$

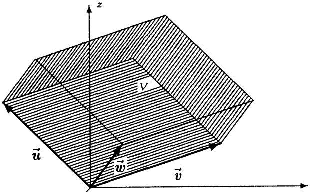


Interpretacja geometryczna wyznaczników 3-go stopnia

Interpretacja geometryczna

- Niech V oznacza równoległościan rozpięty na wektorach $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$, $\overrightarrow{v} = (d, e, f)$, $\overrightarrow{w} = (g, h, i)$ (rys.) Objętość $|V|$ tego równoległościanu wyraża się wzorem:

$$|V| = |det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}|$$



Przykłady

Obliczyć pola podanych obszarów płaskich:

- równoległobok rozpięty na wektorach $\overrightarrow{u} = (-1, 3)$, $\overrightarrow{v} = (2, 5)$
- trójkąt o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (3, 4)$, $C = (-2, 5)$

Przykłady

Obliczyć objętości podanych brył:

- równoległościan rozpięty na wektorach $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 0, 5)$, $\overrightarrow{w} = (1, -2, -3)$
- czworościan o wierzchołkach $A = (0, 1, 2)$, $B = (1, -2, 3)$, $C = (0, -1, 5)$, $D = (-1, -3, 0)$

Dopełnienie algebraiczne

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$. Dopełnieniem algebraicznym elementu macierzy A nazywamy liczbę:

$$D_{ij} \stackrel{def}{=} (-1)^{i+j} det\, A_{ij}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy A

Przykłady

W podanych macierzach obliczyć dopełnienia algebraiczne zaznaczonych elementów:

- $$\begin{vmatrix} 1+i & -3i \\ \boxed{4} & 2-5i \end{vmatrix}$$
- $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$
- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & \boxed{10} \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Rozwinięcia Laplace'a wyznacznika

Twierdzenie

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$ oraz niech liczby naturalne i oraz j, gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n$, będą ustalone. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć ze wzorów:

- $$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$$
  Wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów i-tego wiersza i ich dopełnień algebraicznych. Wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i-tego wiersza
- $$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$$
  Wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów j-tej kolumny i ich dopełnień algebraicznych. Wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j-tej kolumny

Przykłady

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a obliczyć podany wyznacznik. Wyznacznik rozwinąć względem wiersza lub kolumny, który zawiera najwięcej zer

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej

Fakt

Wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej lub górnej jest równy iloczynowi elementów stojących na jego głównej przekątnej.

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Przykłady

Obliczyć wyznaczniki macierzy

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} -1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+i \end{bmatrix}$$

Własności wyznaczników

Fakt

- Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer jest równy 0
- Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze)
- Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie jednakowe kolumny (dwa wiersze) jest równy 0
- Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy

Własności wyznaczników cd.

Fakt

Ponadto

$$det \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & ca_{nn} \end{bmatrix} = c^n det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Wyznacznik macierzy kwadratowej, której elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) są sumami dwóch składników jest równy sumie wyznaczników macierzy, w których elementy tej kolumny (tego wiersza) są zastąpione tymi składnikami
- Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (innego wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę

Własności wyznaczników cd.

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} + a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} + a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} + a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$+ det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Własności wyznaczników cd.

$$
det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =
$$

$$
= det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + ca_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + ca_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + ca_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

Fakt

- Wyznaczniki macierzy kwadratowej i jej transpozycji są równe

Przykłady

Wykorzystując własności wyznaczników obliczyć podane wyznaczniki (zapisać operacje elementarne jakie wykonano na macierzach):

- $$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Przykłady

Wykorzystując własności wyznaczników obliczyć podane wyznaczniki (zapisać operacje elementarne jakie wykonano na macierzach):

- $$\begin{vmatrix} 10 & 33 & 2 & 7 \\ 10 & 43 & 3 & 8 \\ 10 & 53 & 4 & 2 \\ 10 & 63 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Przykłady cd.

- $$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 6 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy

Twierdzenie

Niech A i B będą macierzami kwadratowymi tego samego stopnia. Wtedy

$$det\,(A \cdot B) = det\,A \cdot det\,B$$

Uwaga

Z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że dla $n \in \mathrm{N}$ mamy

$$det\,(A^n) = (det\,A)^n$$

Przykłady

- Obliczyć wyznacznik macierzy X spełniającej równanie
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 36 \\ 5 & 12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

- Niech A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia 3 spełniającymi warunki $det\ A = 2$, $det\ B = 3$. Obliczyć

$$det\ \left[\left(\frac{1}{2}A\right)^3\right] \qquad \text{oraz} \qquad det\ \left[A^4(-B)\right]$$

Macierz odwrotna

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczoną przez A^{-1}, która spełnia warunek:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n

Uwaga. Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną, to nazywamy ją odwracalną i wówczas $det\ A \neq 0$. Macierz odwrotna jest określona jednoznacznie

Przykłady

Obliczyć macierz A^2 i na tej podstawie wyznaczyć A^{-1}, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz osobliwa i nieosobliwa

Definicja

Macierz kwadratową A nazywamy macierzą osobliwą, gdy $det\ A = 0$. W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz A jest nieosobliwa

O macierzy odwrotnej

Twierdzenie

- *Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa*
- *Jeżeli macierz $A = [a_{ij}]$ stopnia n jest nieosobliwa, to*

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{\left(A^D\right)^T}{\det A},$$

gdzie D_{ij} oznaczają dopełnienia algebraiczne elementów a_{ij} macierzy A, a przez A^D oznaczamy macierz $[D_{ij}]$ i nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych

O macierzy odwrotnej

W szczególności, jeśli macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, to

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Przykłady

Korzystając z powyższego twierdzenia znaleźć macierze odwrotne do podanych:

- $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Przykłady

Wykorzystując operację odwracania macierzy rozwiązać podane równania macierzowe:

- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Przykłady

- $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Przykłady

- $3X + X \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Przykłady

- $$\left(2X+\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bezwyznacznikowy algorytm dla macierzy odwrotnej

Schemat

Niech A będzie macierzą nieosobliwą. Aby znaleźć macierz odwrotną do macierzy A postępujemy w następujący sposób. Z prawej strony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową I tego samego stopnia. Na wierszach otrzymanej w ten sposób macierzy blokowej $[A|I]$ będziemy wykonywać następujące operacje elementarne:

- przestawiać wiersze: $w_i \longleftrightarrow w_j$
- wiersz mnożyć przez stałą: $cw_i, \quad$ gdzie $c \neq 0$
- do elementów wiersza dodawać odpowiadające im elementy innego wiersza pomnożone przez stałą: $w_i + cw_j$

Przy pomocy tych operacji sprowadzamy macierz blokową $[A|I]$ do postaci $[I|B]$, gdzie $B = A^{-1}$

Przykłady

Korzystając z powyższego algorytmu znaleźć macierz odwrotną do podanej:

- $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna

Własności macierzy odwrotnych

Niech macierze A i B tego samego stopnia będą odwracalne oraz niech $\alpha \in C \setminus \{0\}$, $n \in N$. Wtedy macierze A^{-1}, A^T, AB, αA, A^n także są odwracalne i prawdziwe są równości:

- $det\ (A^{-1}) = (det\ A)^{-1}$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$
- $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}(A^{-1})$ $\qquad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$