Wykład XIV-XV: Krzywe stożkowe

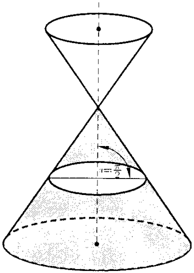
Alicja Janic

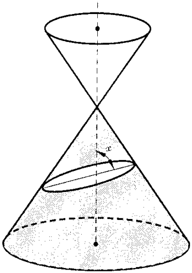
Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

15 styczeń 2020

Krzywe stożkowe jako przekroje stożka

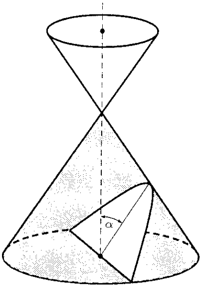
Definicja


Rys. 6.1.2. Okrąg

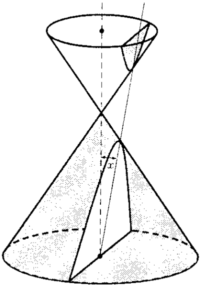

Rys. 6.1.3. Elipsa

Krzywe stożkowe jako przekroje stożka

Definicja



Rys. 6.1.4. Parabola



Rys. 6.1.5. Hiperbola

Równanie okręgu

Definicja

Zbiór punktów P płaszczyzny położonvch w stałej odległości od ustalonego punktu P_0 tej płaszczyzny nazywamv okręgiem:

$$r = |PP_0| = const$$

Punkt P_0 nazywamy środkiem, a stałą const. promieniem okręgu

Równanie okręgu

We współrzędnvch kartezjańskich równanie okręgu o środku $P_0 = (x_0, y_0)$ i promieniu $r > 0$ ma postać:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Przykłady

- Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty $P = (2, 3)$, $Q = (5, 2)$ i ma środek na osi Ox
- Znaleźć równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych i przechodzi przez punkt $A(5, 8)$. Ile rozwiązań ma zadanie?

Równanie stycznej okręgu

Równanie stycznej okręgu

Niech punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ należy do okręgu

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Wtedy równanie stycznej okręgu w punkcie P_1 ma postać:

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

Prosta jest styczną okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy ma z nim tylko jeden punkt wspólny

Przykłady

Znaleźć równanie stycznej okręgu $x^2 + y^2 = 25$

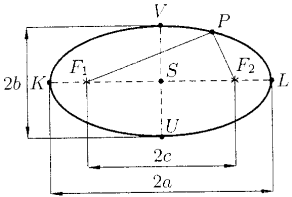
- w punkcie $(-3, 4)$
- przechodzącej przez punkt $(12, 0)$
- równoległej do prostej $x - y - 4 = 0$
- prostopadłej do prostej $x + 2y$

Elipsa jako miejsce geometryczne punktów

Definicja

Zbiór punktów P płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punkłów F_1 i F_2 tej płaszczyzny jest stała i większa od odległości między F_1 i F_2, nazywamy elipsą

$$|PF_1| + |PF_2| = const$$



Rys. 6.3.1 Elipsa

Elipsa jako miejsce geometryczne punktów

Definicja

Punkty F_1 i F_2 nazywamy ogniskami, a odległość między nimi, tj. liczbę $2c = |F_1F_2|$ ogniskową elipsy. Osią wielką elipsy nazywamy liczbę $2a$ która jest długością odcinka KL, łączącego punkty elipsy położone na jej osi przechodzącej przez ogniska. Osią małą elipsy nazywamy liczbę $2b$, która jest długością odcinka UV łączącego punkty elipsy położone na jej drugiej osi. Oczywiście $b < a$. Punkt S przecięcia osi symetrii elipsy nazywamy jej środkiem, zaś punkty K, L oraz U, V wierzchołkami. Liczbę $\epsilon = \frac{c}{a}$ nazywamy mimośrodem elipsy

Przykłady

Niech P, F_1, F_2 oraz a, b, c będą oznaczeniami wprowadzonymi w definicji elipsy. Pokazać, że:

- $|PF_1| + |PF_2| = 2a$
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Równanie elipsy

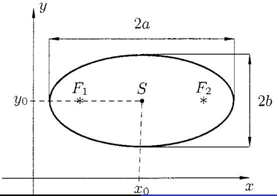
Równanie elipsy

Równanie elipsy o środku (x_0, y_0) oraz osiach $2a$, $2b$ równoległych do osi układu współrzędnych ma postać:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Ogniska F_1, F_2 elipsy o powyższym równaniu mają współrzędne

$$F_1 = (x_0 - c, y_0), \quad F_2 = (x_0 + c, y_0)$$



Równanie stycznej elipsy

Równanie stycznej elipsy

Niech punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ należy do elipsy

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Wtedy równanie stycznej elipsy w punkcie P_1 ma postać:

$$\frac{(x_1-x_0)(x-x_0)}{a^2} + \frac{(y_1-y_0)(y-y_0)}{b^2} = 1$$

Prosta jest styczną elipsy wtedy i tylko wtedy, gdy ma z nią tylko jeden punkt wspólny

Przykłady

- Obliczyć współrzędne ognisk elipsy $\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
- Znaleźć osie i środek elipsy $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$
- Punkty $A = (0, -4)$ oraz $B = (6, 0)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. Znaleźć współrzędne wierzchołka C. Ile rozwiązań ma zadanie?

Przykłady

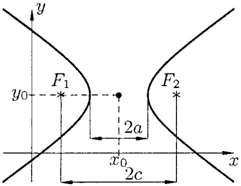
- Napisać równanie stycznej elipsy $4x^2 + 25y^2 = 100$ w punkcie $P_1 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$
- Wyznaczyć równania stycznych elipsy $x^2 + 9y^2 = 9$ przechodzących przez punkt $A = (5, 0)$
- Znaleźć równania stycznych elipsy $4x^2 + 5y^2 = 120$, które są prostopadłe do prostej $2x + y = 0$

Hiperbola jako miejsce geometryczne punktów

Definicja

Zbiór punktów P płaszczyzny, których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 tej płaszczyzny jest stała i mniejsza niż odległość między F_1 i F_2 nazywamy hiperbolą

$$||PF_1| - |PF_2|| = const$$



Rys. 6.4.2. Hiperbola we współrzędnych kartezjańskich

Hiperbola jako miejsce geometryczne punktów

Definicja

Punkty F_1 i F_2 nazywamy ogniskami, a odległość między nimi, tj. liczbę $2c = |F_1F_2|$ ogniskową hiperboli. Hiperbola składa się z dwóch części zwanych gałęziami. Hiperbola ma dwie osie symetrii. Punkt S przecięcia osi symetrii hiperboli nazywamy środkiem. Wierzchołkami hiperboli nazywamy punkty K i L należące do osi symetrii zawierającej ogniska. Odległość $2a$ między wierzchołkami hiperboli nazywamy osią rzeczywistą. Oczywiście $c > a$. Mimośrodem hiperboli nazywamy liczbę $\epsilon = \frac{c}{a}$

Przykłady

Pokazać, że stała const w definicji hiperboli jest równa $2a$

Równanie hiperboli

Równanie hiperboli

Równanie hiperboli o środku (x_0, y_0), ogniskowej $2c$ oraz osi rzeczywistej $2a$, która jest równoległa do osi Ox, ma postać:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

gdzie $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Ogniska F_1, F_2 hiperboli o powyższym równaniu mają współrzędne

$$F_1 = (x_0 - c, y_0), \quad F_2 = (x_0 + c, y_0)$$

Asymptoty hiperboli

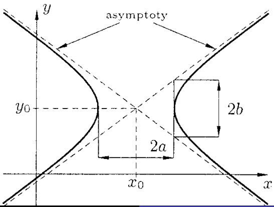
Asymptoty hiperboli

Hiperbola

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

ma asymptoty o równaniach

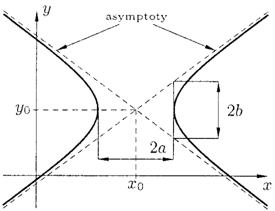
$$y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0), \quad y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$$



Oś urojona hiperboli

Oś urojona hiperboli

Liczbę $2b$ nazywamv osią urojoną hiperboli. W interpretacji geometrycznej liczba ta jest długością odcinka prostej przechodzącej przez wierzchołek hiperboli i równoległej do osi a zawartego między asymptotami. Jeżeli hiperbola ma jednakowe osie $a = b$, to nazywamy ją równoosiową



Rys. 6.4.3. Asymptoty hiperboli

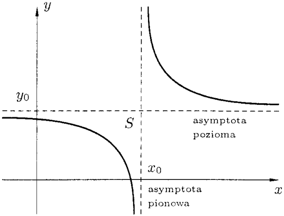
Hiperbola równoosiowa

Hiperbola równoosiowa

Po obrocie hiperboli równoosiowej wokół środka S o kąt $\frac{\pi}{4}$ jej równanie przyjmie postać

$$(x - x_0)(y - y_0) = \frac{a^2}{2}$$

Asymptotami tej hiperboli są proste $x = x_0$ i $y = y_0$



Przykłady

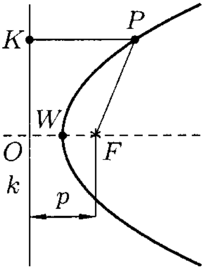
- Znaleźć równanie hiperboli o środku $S = (0, 0)$, wierzchołku $L = (2, 0)$ i ognisku $F_2 = (5, 0)$
- Proste $y = 3x$, $y = -3x$ są asvmptotami, a punkt $L = (4, 0)$ jest wierzchołkiem hiperboli. Znaleźć współrzędne jej ognisk
- Znaleźć oś rzeczywistą oraz ogniskowe hiperboli $xy = 8$
- Mimośród hiperboli jest równy 2. Wyznaczyć kąt między jej asymptotami

Parabola jako miejsce geometryczne punktów

Definicja

Zbiór punktów P płaszczyzny równo oddalonych od ustalonego punktu F i ustalonej prostej k na płaszczyźnie, przy czym punkt F nie należy do prostej k, nazywamy parabolą

$$|PF| = |PK|$$



Parabola jako miejsce geometryczne punktów

Definicja

Punkty F nazywamy ogniskiem, a prostą k kierownicą paraboli. Parabola ma jedną oś symetrii. Punkt W paraboli położony na osi symetrii nazywamy jej wierzchołkiem, a liczbę $2p = 2|FO|$, gdzie O jest punktem kierownicy należącym do osi symetrii paraboli, nazywamy parametrem paraboli

Równanie paraboli

Równanie paraboli

Niech liczba $2p$ będzie parametrem, a punkt $W(x_0, y_0)$ wierzchołkiem paraboli, której oś symetrii jest równoległa do osi Ox. Wtedy równanie paraboli ma postać:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Równanie kierownicy k takiej paraboli ma postać $x = x_0 - \frac{p}{2}$ a ognisko F współrzędne $F = (x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$
Równanie paraboli obróconej o kąt $\frac{\pi}{2}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara ma postać:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Przykłady

- Znaleźć równanie paraboli, która ma wierzchołek w początku układu i ognisko $F(-3,0)$
- Znaleźć równanie paraboli, która przechodzi przez punkty $A=(0,0)$, $B=(2,1)$, $C=(8,-2)$ i ma poziomą oś symetrii
- Wyznaczyć współrzędne ogniska i równanie kierownicy paraboli $y=x^2+3$
- Środkiem cięciwy paraboli $y^2=6x$ jest punkt $S=(3,2)$. Znaleźć współrzędne końców tej cięciwy