Wstęp do statystyki matematycznej
Lista 3

1. Pokazać, że jeżeli $\mathcal{P}$ jest rodziną z parametrem skali na R^+, to jej obraz przez przekształcenie $Y = \log X$ jest rodziną z parametrem położenia na R.

2. Niech $\mathcal{P}$ będzie jednoparametrową rodziną rozkładów gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, gdzie α jest ustalone, a $\beta > 0$. Pokazać, że jej obraz w przekształceniu $Y = \sigma \log X$, $\sigma > 0$, jest rodziną z parametrami położenia i skali $(\log \beta, \sigma)$.

3. Niech $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \lambda)$ będzie przestrzenią σ-skończoną, a $T : \mathcal{X} \to R^k$ przekształceniem mierzalnym. Załóżmy, że $\Theta = \{\vartheta \in R^k : c(\vartheta) = \int e^{\vartheta^T T(x)} \lambda(dx) < \infty\}$ jest niepusty i ma niepuste wnętrze. Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, udowodnić, że dla każdego $\vartheta_0 \in \operatorname{int} \Theta$ funkcja $c(\vartheta)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe dowolnego rzędu w otoczeniu ϑ_0 oraz
$$\int T(x) e^{\vartheta_0^T T(x)} \lambda(dx) = \frac{\partial c(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \; (= c(\vartheta_0) E_{P_{\vartheta_0}} T(X)),$$
$$\int T(x) T(x)^T e^{\vartheta_0^T T(x)} \lambda(dx) = \frac{\partial^2 c(\vartheta_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta^T} \; (= c(\vartheta_0) E_{P_{\vartheta_0}} T(X) T^T(X)).$$

4. Pokazać, że rodzina rozkładów Gumbela (podwójnie wykładniczych) o gęstości $p_m(x) = \exp\{-e^{-(x-m)} - (x - m)\}$, $m \in R$, jest jednoparametrową rodziną wykładniczą.

5. Wykazać, że jeśli rodzina gęstości $\mathcal{P} = \{p_m : p_m(x) = p_0(x - m), x \in R, m \in R\}$, gdzie p_0 jest gęstością dodatnią o ciągłej pochodnej rzędu 2, jest rodziną wykładniczą, to albo jest to rodzina rozkładów normalnych z jakąś ustaloną wariancją σ_0^2 albo $p_0(x) = \frac{1}{|\sigma|\Gamma(b\sigma)} \exp\{-e^{-x/\sigma} - bx\}$, dla pewnych b, σ takich, że $b\sigma > 0$. ($b = \sigma = 1$ daje rozklad Gumbela).

6. Zbadać, czy nastepujące rodziny rozkładów są rodzinami wykładniczymi:
   (a) Poissona z parametrem $\lambda > 0$;
   (b) o gęstości $f(x; \theta) = \exp[-2 \log \theta + \log(2x)] \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x)$, $\theta > 0$;
   (c) o gęstości $f(x; \theta) = 1/9$, $x \in \{0.1 + \theta, ..., 0.9 + \theta\}$, $\theta > 0$;
   (d) o gęstości $f(x; \theta) = 2\dfrac{x + \theta}{1 + 2\theta} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$;
   (e) beta o gęstości $f(x; \alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$, $\alpha, \beta > 0$;
   (f) dwuwymiarowych rozkładów normalnych (pięcioparametrowa);
   (g) wielomianowych;
   (h) lognormalnych o gęstości $f(x; m, \sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left\{-\dfrac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.

   Jeśli tak, to która jest naturalną rodziną wykładniczą, rodziną z naturalną parametryzacją, rodziną pełnego rzędu?

7. Pokazać, że rodzina rozkładów:
   (a) dwumianowych ujemnych $\mathcal{NB}(r, p)$;
   (b) Weibulla $\mathcal{W}e(\alpha, \beta)$;
   (c) logistycznych o gęstości $f(x; m) = (e^{(x-m)/2} + e^{-(x-m)/2})^{-2}$;

   nie jest rodziną wykładniczą.

8. Niech $X = (X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu Rayleigh'a $\mathcal{R}a(\sigma)$. Korzystając z zad. 3 z tej listy, wyznaczyć $E(Y)$ i $Var(Y)$, gdzie $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$.