Wykład 2. Szeregi potęgowe.

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska

21.03.2023

Wykład jest prowadzony w oparciu o podręcznik
„Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory”
M. Gewerta i Z. Skoczylasa.

Definicja

Szeregiem funkcyjnym *na zbiorze* $X \subset \mathbb{R}$ *nazywamy wyrażenie postaci*

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

gdzie ciąg $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *jest ciągiem funkcji określonych na zbiorze* $X \subset \mathbb{R}$.

Definicja

Szeregiem funkcyjnym *na zbiorze* $X \subset \mathbb{R}$ *nazywamy wyrażenie postaci*

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

gdzie ciąg $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *jest ciągiem funkcji określonych na zbiorze* $X \subset \mathbb{R}$.

Zamiast pisać $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ będziemy pisać krótko $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definicja

Szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest* **zbieżny w punkcie** $x_0 \in X$, *jeśli istnieje właściwa granica ciągu sum częściowych* $\{S_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Tą granicę nazywamy* **sumą szeregu funkcyjnego**

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

Definicja

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest* **zbieżny w punkcie** $x_0 \in X$, *jeśli istnieje właściwa granica ciągu sum częściowych* $\{S_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Tą granicę nazywamy* **sumą szeregu funkcyjnego**

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest* **zbieżny punktowo na zbiorze** $A \subset \mathbb{R}$, *jeśli szereg ten jest zbieżny w każdym punkcie* $x_0 \in A$.

1. Inaczej mówiąc, szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny w punkcie x_0, jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny.

1. Inaczej mówiąc, szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny w punkcie x_0, jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny.
2. Do badania tej zbieżności można stosować wszystkie poznane do tej pory kryteria zbieżności szeregów liczbowych (Cauchy'ego, d'Alemberta, porównawcze, ilorazowe i całkowe).

Definicja

Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R},$$

nazywamy **szeregiem potęgowym o środku** $x_0 \in \mathbb{R}$ **i współczynnikach** $c_n \in \mathbb{R}$ **dla** $n \in \mathbb{N}$.

Definicja

Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R},$$

nazywamy **szeregiem potęgowym o środku** $x_0 \in \mathbb{R}$ **i współczynnikach** $c_n \in \mathbb{R}$ **dla** $n \in \mathbb{N}$.

Przyjmujemy konwencję, że dla $x = x_0$ jest $(x - x_0)^0 = 1$.

Definicja

Promieniem zbieżności *szeregu potęgowego nazywamy liczbę R określoną wzorem:*

$$\begin{cases} 0, & \text{gdy } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, & \text{gdy } 0 < \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty \\ \infty, & \text{gdy } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \end{cases}$$

Definicja

Promieniem zbieżności *szeregu potęgowego nazywamy liczbę R określoną wzorem:*

$$\begin{cases} 0, & \text{gdy } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, & \text{gdy } 0 < \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty \\ \infty, & \text{gdy } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \end{cases}$$

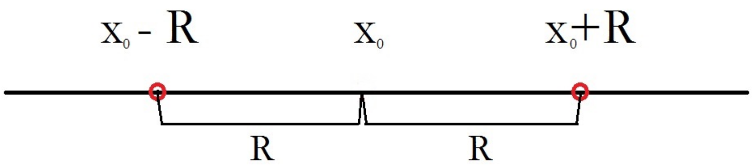
Promień zbieżności R może też być obliczany ze wzorów

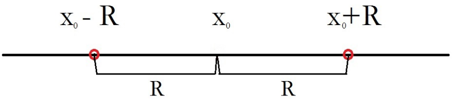
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \text{ lub } R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

o ile granice w tych wzorach istnieją!

Twierdzenie (Cauchy'ego-Hadamarda)

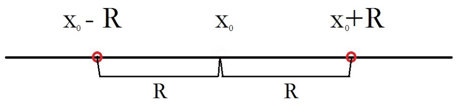
Niech $0 < R < \infty$ *będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. *Wtedy szereg ten jest zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie przedziału* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *i rozbieżny w każdym punkcie zbioru* $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.





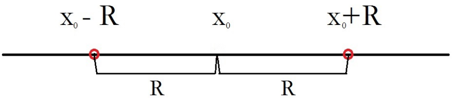
Uwaga

- *Na końcach przedziału* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *szereg może być zbieżny lub rozbieżny.*



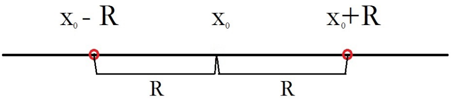
Uwaga

- *Na końcach przedziału* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *szereg może być zbieżny lub rozbieżny.*
- *Jeżeli* $R = 0$ *to szereg jest zbieżny tylko w punkcie* x_0.



Uwaga

- *Na końcach przedziału* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *szereg może być zbieżny lub rozbieżny.*
- *Jeżeli* $R = 0$ *to szereg jest zbieżny tylko w punkcie* x_0.
- *Jeżeli* $R = \infty$, *to szereg jest zbieżny bezwzględnie na całej prostej* $\mathbb{R}$.



Uwaga

- *Na końcach przedziału* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *szereg może być zbieżny lub rozbieżny.*
- *Jeżeli* $R = 0$ *to szereg jest zbieżny tylko w punkcie* x_0.
- *Jeżeli* $R = \infty$, *to szereg jest zbieżny bezwzględnie na całej prostej* $\mathbb{R}$.
- *Zbiór tych* $x \in \mathbb{R}$, *dla których szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ *jest zbieżny, nazywamy jego* **przedziałem zbieżności**.

Przykłady

Znaleźć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+1)^n}{n+1}, \quad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty}(5x-10)^n, \quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^n},$$