Przykłady z wykładu I

1) Wyznaczyć $z \in \mathbb{C}$ spełniające równanie

$$\frac{z+2}{i-1} = \frac{3z+i}{2+i}$$

$$(2+i)z + 4 + 2i = 3(i-1)z - 1 - i$$

$z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $(2+i)(x+iy) + 4 + 2i = (3i-3)(x+iy) - 1 - i$

$$2x + 2iy + ix - y + 4 + 2i = 3ix - 3y - 3x - 3iy - 1 - i$$

$$2x - y + 4 + i(2y + x + 2) = -3x - 3y - 1 + i(3x - 3y - 1)$$

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = -3x - 3y - 1 \\ x + 2y + 2 = 3x - 3y - 1 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} 5x + 2y = -5 \\ -2x + 5y = -3 \quad \Big| \cdot \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\left(2 + \frac{25}{2}\right)y = -5 - \frac{15}{2}$$

$$x = -1 - \frac{2}{5}\left(\frac{-25}{29}\right) \Leftarrow y = \frac{-25}{29} \Leftarrow \frac{29}{2}y = \frac{-25}{2}$$

$$x = -1 + \frac{10}{29} = \frac{-19}{29} \Rightarrow \underline{\underline{\text{odp}}} \quad z = -\frac{19}{29} - \frac{25}{29}i$$

2) Rozwiązać: $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 5 + 3i$

$z = x + iy$, $x,y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$ $\Rightarrow$ $2x + i(2iy) = 5 + 3i$ $\Rightarrow$

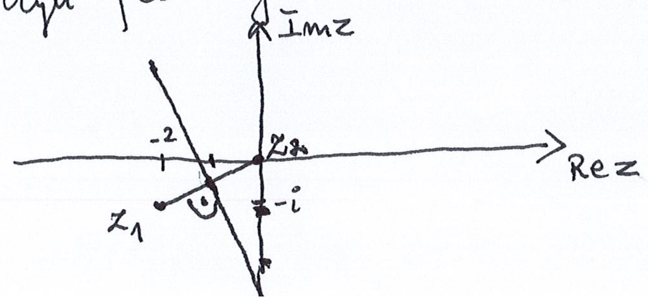
$$2x - 2y \underset{+0i}{\uparrow} = 5 + 3i$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ 0 = 3 \text{ sprz.} \end{cases} \qquad \text{odp. } \emptyset$$

3) Narysować zbiór liczb $|\bar{z} + 2 - i| = |z|$

$$|\bar{z} + 2 - i| = |\bar{z} + \overline{2+i}| = |\overline{z+2+i}| = |z + 2 + i|$$

Zatem $|z - (-2-i)| = |z|$. Szukany zbiór składa się z p-któw równoodległych od punktów $z_1 = -2 - i$, $z_2 = 0$, czyli jest symetralną odcinka o końcach z_1 i z_2



Prosta przechodzi przez p-kt $z_1 = -1 - \frac{1}{2}i$ i ma współczynnik kierunkowy

$a = -2$, $y = -2x + b$

$$-\frac{1}{2} = 2 + b = b = -\frac{5}{2}$$

$$y = -2x - \frac{5}{2}$$

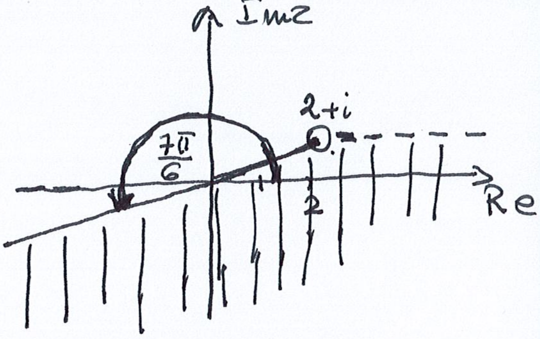
Przykłady z wykładu II

1) $\frac{\pi}{6} \leq \arg(2+i-z) \leq \pi$

$\frac{\pi}{6} \leq \arg(z-(2+i)) - \pi \leq \pi$

$\frac{7\pi}{6} \leq \arg(z-(2+i)) < 2\pi$

$\leq 2\pi$



2) Znaleźć zbiór liczb zesp. spełniających

$\bar{z} \cdot z^4 = \frac{1}{z}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

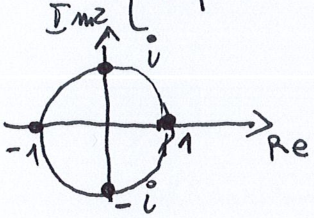
$r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]\, r^4[\cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi)] =$

$= \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$

$r^5[\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)] = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$

$\begin{cases} r^5 = \frac{1}{r} \\ 3\varphi = -\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\quad r^6 = 1 \Rightarrow r = 1$, $\quad 4\varphi = 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0,1,2,3$

odp. $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$



3) Rozwiązać równanie $z^6 = (1+2i)^{12} \iff z = \sqrt[6]{(1+2i)^{12}}$

• jedno rozwiązanie $z_1 = (1+2i)^2 = -3+4i$

$n=6 \to z_{k+1} = z_k\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = z_k\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}z_k(1+i\sqrt{3})$

• $z_2 = (-3+4i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2i - 2\sqrt{3} =$

$\frac{1}{2}(-3+4i)(1+i\sqrt{3})$ $\quad = -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + i\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2}(3+4\sqrt{3}) + \frac{1}{2}i(4-3\sqrt{3})$

• $z_3 = \left[-\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + i\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right] \times \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

$z_3 = \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})\left[-(3+4\sqrt{3}) + i(4-3\sqrt{3})\right] = \frac{1}{4}(6-8\sqrt{3}) - \frac{1}{4}i(6\sqrt{3}+8)$

$z_4 = \frac{1}{8}(1+i\sqrt{3})\left[(6-8\sqrt{3}) - i(6\sqrt{3}+8)\right] = 3-4i$

$z_5 = (3-4i)\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(3+4\sqrt{3}) - \frac{1}{2}i(4-3\sqrt{3})$

$z_6 = -\frac{1}{4}(6-8\sqrt{3}) + \frac{1}{4}i(6\sqrt{3}+8)$