Wielomiany

zad 1) Wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu:

$$W(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 3z - 3$$

wiedząc, że posiada on pierwiastki całkowite

- Sprawdzamy dzielniki $a_0 = -3$.

Ponieważ $W(1) = 0$ oraz $W(-1) = 0$, to z tw. Bézouta

$z^2 - 1 \mid W(z)$:

$$\begin{array}{l} \quad z^2 - 3z + 3 \\ \hline z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 3z - 3 \; : \; z^2 - 1 \\ -\;z^4 \qquad\;\; - z^2 \\ \hline = -3z^3 + 3z^2 + 3z - 3 \\ \quad -\;-3z^3 \qquad\;\; + 3z \\ \hline \quad = \quad 3z^2 \qquad - 3 \\ \quad -\;\; 3z^2 \qquad - 3 \\ \hline \quad = \qquad\qquad = \end{array}$$

$$W(z) = (z^2 - 1)(z^2 - 3z + 3)$$

- Szukamy pierwiastków wielomianu kwadratowego $z^2 - 3z + 3$

$\Delta = 9 - 12 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

Odp $z_1 = \dfrac{3 + \sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \dfrac{3 - \sqrt{3}i}{2}$, $z_3 = 1$, $z_4 = -1$

zad 2) Znając jeden z pierwiastków wielomianu znaleźć pozostałe pierwiastki $z_1 = 1 - i$

$$W(z) = z^6 - 2z^5 + 2z^4 + z^2 - 2z + 2,$$

- Skoro $W(1-i) = 0$, to także $W(1+i) = 0$:

z tw. Bézout $(z - z_1)\cdot(z - \bar{z}_1) \mid W(z)$

$$W(z) = z^4(z^2 - 2z + 2) + z^2 - 2z + 2 = \underbrace{(z^2 - 2z + 2)}_{(z - z_1)\cdot(z - \bar{z}_1)}(z^4 + 1)$$

- Szukamy pierwiastków wielomianu $z^4 + 1$:

Są np. dwa sposoby:

$$\sqrt[4]{-1} = \Big\{ \underbrace{\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i}_{z_0 = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})},\ \underbrace{-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i}_{z_1 = z_0 i},\ \underbrace{-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i}_{z_2 = z_1 i},\ \underbrace{\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i}_{z_3 = z_2 i} \Big\}$$

lub

$$z^4 + 1 = (z^2 + 1)^2 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 =$$

$$= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$$

Odp. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i$, $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$,

$z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ $(= -z_3)$, $z_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ $(= -z_4)$

zad 3

Rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych

- $\frac{10x+3}{x^3+27} = \frac{10x+3}{(x+3)(x^2-3x+9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-3x+9}$

$$\frac{A(x^2-3x+9)+(Bx+C)(x+3)}{x^3+27} = \frac{x^2(A+B)+x(3B+C-3A)+9A+3C}{x^3+27}$$

Porównujemy liczniki

$$\begin{cases} A+B=0 & \rightarrow B=-A \\ 3B+C-3A=10 & \\ 9A+3C=3 & \rightarrow C=1-3A \end{cases}$$

$\rightarrow -3A+1-3A-3A=10$

$-9A=9$

$A=-1$

$B=1$

$C=4$

Odp. $\frac{10x+3}{x^3+27} = -\frac{1}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-3x+9}$

- $\frac{2x^2-6x-9}{x^4+6x^3+9x^2} = \frac{2x^2-6x-9}{x^2(x^2+6x+9)} = \frac{2x^2-6x-9}{x^2(x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$

$$= \frac{Ax(x+3)^2+B(x+3)^2+Cx^2(x+3)+Dx^2}{x^2(x+3)^2}$$

Porównujemy liczniki ; $2x^2-6x-9 = Ax(x+3)^2+B(x+3)^2+Cx^2(x+3)+Dx^2$

$x=0 \rightarrow$ $-9 = 9B \Rightarrow B=-1$

$x=-3 \rightarrow$ $27 = 9D \Rightarrow D=3$

$x=1 \rightarrow$ $-13 = 16A-16+4C+3 \Rightarrow 16A+4C=0 \Rightarrow C=-4A$

$x=-1 \rightarrow$ $-1 = -4A-4+2C+3 \Rightarrow 4A-2C=0 \Rightarrow C=2A$

$\Rightarrow A=C=0$

$$\frac{2x^2-6x-9}{x^4+6x^3+9x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{(x+3)^2}$$