RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA
Lista 5

1. Punkt startuje z początku ukladu współrzędnych i porusza się po prostej: przesuwa się o jednostkę w lewo z prawdopodobieństwem $0,5$ i o jednostkę w prawo z prawdopodobieństwem $0,5$. Przyjmując, że poszczególne przesunięcia są niezależne, wyznaczyć rozklad zmiennej losowej D, gdzie D jest położeniem punktu po sześciu przesunięciach. Wyznaczyć rozklad zmiennej losowej D^2.

2. Samochód porusza się po trasie, na której znajdują się 4 sygnały świetlne, działające niezależnie od siebie. Każdy z nich zatrzymuje lub przepuszcza samochód z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$. Niech X oznacza liczbę sygnałów miniętych przez samochód do momentu pierwszego zatrzymania. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X i narysować jej dystrybuantę.

3. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $2, 3, 5, 8$ z prawdopodobieństwami odpowiednio równymi $2/10, 4/10, 3/10, 1/10$.Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej i obliczyć

   a). $P(X \leq 3)$,

   b). $P(X \geq 2.5)$,

   c). $P(2.7 \leq X < 5.1)$.
   (**odp.** 0.6, 0.8, 0.7)

4. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \leq 0, \\ 0.1 + x & dla \quad 0 < x \leq 0.5, \\ 0.4 + x & dla \quad 0.5 < x \leq 0.55, \\ 1 & dla \quad x > 0.55. \end{cases}$$

   Wyznaczyć $P(X = 0.5)$, $P(0 \leq X < 0.5)$, $P(0 < X < 0.55)$. (**odp.** 0.3, 0.6, 0.85)

5. a). Dobrać stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = A + B arctg(2x)$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Obliczyć $P(X > 0.5)$. (**odp.** $A = 1/2$, $B = 1/\pi$, $1/4$)

   b). Dobrać stałe A i B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} Ax^2 & dla \quad x \leq -1, \\ x + B & dla \quad -1 < x \leq -0.5, \\ 1 & dla \quad x > -0.5. \end{cases}$$

   była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Obliczyć $P(-0.75 < X < 0)$.
   (**odp.** $A = 0$, $B \in [1, 3/2]$)

   c). Dobrać stałe A i B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} A + 1 + e^x & dla \quad x \leq -1, \\ e^{-1} & dla \quad -1 < x \leq 1, \\ B(3 - x^{-1}) & dla \quad 1 < x. \end{cases}$$

   była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Obliczyć $P(-2 < X < 1/2)$ i $P(X > 2)$. (**odp.** $A = -1$, $B = 1/3$, $e^{-1} - e^{-2}$,$1/6$)

6. Dobrać stałą A tak, aby funkcja f określona poniżej była gęstością pewnej zmiennej losowej X. Znaleźć i narysować dystrybuantę tej zmiennej. Znaleźć $P(0.5 < X < 1.5)$.

$$f(x) = \begin{cases} A(x-1) & dla \quad x \in [0,1] \\ 0 & dla \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

(**odp.** $A = -1$, $1/4$)

7. Zmienna losowa X ma gęstość określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x/8 & \text{dla} \quad x \in (3,5), \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin (3,5). \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej i obliczyć:

a). $P(X < 4)$,

b). $P(X > 3.5)$,

c). $P(4 < X < 5)$,

d). $P(X < 3.5 \text{ lub } X > 4.5)$.

8. Niech zmienna losowa X ma dystrybuantę F. Znaleźć dystrybuanty zmiennych losowych $Y = -X$, $Z = |X|$, $U = X^2$.

9. Czas pracy i-tego elementu jest zmienną losową X_i o dystrybuancie F_i, $i = 1, 2$. Zakładamy, że X_1 i X_2 są niezależne. Znaleźć dystrybuantę czasu pracy układu szeregowego złożonego z dwóch takich elementów.

10. Sprawdzić, że $F(x) = e^{-e^{-x}}$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.

11. Zmienna losowa X ma ciągłą, różnowartościową dystrybuantę F. Znaleźć dystrybuantę zmiennej $Y = F(X)$.