# Wykład I: Definicja Parwdopodobieństwa

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

5 październik 2020

# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

## Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych i oznaczamy przez $\Omega$. Elementy zbioru nazywamy zdarzeniami elementarnymi i oznaczamy przez $\omega$.

Przykłady:

- Wykonujemy rzut kostką - obserwujemy liczbę oczek na kostce - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Rzucamy symetryczną monetą aż do pojawienia się orła - $\Omega = \{O, RO, RRO, ....\}$
- Obserwujemy czas $t$ niezawodnej pracy urządzenia - $\Omega = \{t : t \in [0, \infty)\}$

# Zbiór zdarzeń

## Zdarzenia losowe

Zdarzeniem losowym nazywamy podzbiór $\Omega$. Zbiór wszystkich zdarzeń oznaczać będziemy literą $\mathcal{F}$. Dla zdarzeń, podobnie jak dla zbiorów, określamy sumę zdarzeń $A \cup B$, iloczyn zdarzeń $A \cap B$, różnicę zdarzeń $A \setminus B$. Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia $A$ nazywamy zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$. $\Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym, $\emptyset$ - zdarzeniem niemożliwym. Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zdarzenia $A$, $B$ wykluczają się. Nie wszystkie podzbiory $\Omega$ będziemy uważać za zdarzenie i zaliczać do zbioru $\mathcal{F}$.

Ze względu na wymagania dotyczące działań na zdarzeniach, zakładamy, że zbiór zdarzeń $\mathcal{F}$ spełnia następujące warunki:

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\quad A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A' \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Rodzinę $\mathcal{F}$ nazywamy $\sigma$ ciałem zbiorów

# Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

## Definicja

**Prawdopodobieństwem** *nazywamy funkcję określoną na rodzinie zdarzeń $\mathcal{F}$ spełniającą następujące warunki:*

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *dla każdego zdarzenia* $A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- *Jeżeli* $A_1, A_2, \ldots$ *są parami rozłączne (tzn.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla dowolnych* $i \neq j$ *), to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

*W szczególności* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *dla zdarzeń rozłącznych* $A$*,* $B$

# Wnioski

- Jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A') = 1 - P(A)$, a stąd $P(\emptyset) = 0$
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$,
  w szczególności, jeżeli $A \subset B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

# Przykłady

## Przykład 1

Studenci Wydziału Elektroniki muszą zaliczyć dwa lektoraty: z języka angielskiego i z języka niemieckiego. Z danych Dziekanatu wynika, że $\frac{2}{3}$ studentów zalicza lektorat z języka angielskiego, oba lektoraty zalicza co czwarty student, zaś przynajmniej jeden z lektoratów zalicza również $\frac{2}{3}$ studentów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student:

a) nie zaliczył żadnego lektoratu?

b) zaliczył język angielski i nie zaliczył języka niemieckiego?

# Rozwiązanie

Niech $A$ oznacza zdarzenie "losowo wybrany student zaliczył lektorat z języka angielskiego", przyjmujemy, że $P(A) = \frac{2}{3}$,
B - zdarzenie "losowo wybrany student zaliczył lektorat z języka niemieckiego".
a) Oczywiście chodzi o zdarzenie $A' \cap B'$, więc

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

b) Podobnie

$$P(A \cap B') = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

# Prawdopodobieństwo klasyczne

## Definicja

*Przestrzeń* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ *jest zbiorem* $n$ *zdarzeń elementarnych, z których każde zachodzi z tym samym prawdopodobieństwem, czyli* $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$ *dla* $i = 1, 2, ..., n$*. Zgodnie z aksjomatyczną definicją prawdopodobieństwa, wzór*

$$P(A) = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

*gdzie* $\#A$ *oznacza liczbę elementów zbioru* $A$*, określa prawdopodobieństwo na wszystkich zdarzeniach* $A \subset \Omega$*. Jest to tzw.* **prawdopodobieństwo klasyczne***.*

Zbiór zdarzeń $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ - rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\Omega$

# Podstawowe schematy kombinatoryczne

W rozwiązywaniu zagadnień, w których przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona przydadzą się nam wiadomości z kombinatoryki.

- **Kombinacją** $k$-elementową zbioru $n$-elementowego nazywamy nieuporządkowany $k$-elementowy podzbiór wyjściowego zbioru $n$-elementowego. Innymi słowy: ze zbioru $n$-elementowego wybieramy k-elementów i nie dbamy o ich kolejność.
  a) Jeżeli nie dopuszczamy powtórzeń, to ilość takich kombinacji bez powtórzeń wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad k = 0, 1, ..., n.$$

  Przypomnienie $0! = 1$

# Podstawowe schematy kombinatoryczne

- **Kombinacją** $k$-elementową zbioru $n$-elementowego.
  a) Gdy dopuszczamy możliwość powtórzeń, to ilość takich kombinacji z powtórzeniami wynosi

$$\binom{n+k-1}{k} \qquad k = 1, ..., n$$

# Podstawowe schematy kombinatoryczne

- **Wariacją** $k$-elementową zbioru $n$-elementowego nazywamy uporządkowany $k$-elementowy ciąg wyjściowego zbioru $n$-elementowego. Innymi słowy: ze zbioru $n$-elementowego wybieramy $k$-elementów, jednak kolejość wyboru ma teraz znaczenie.
  a) Jeżeli nie dopuszczamy powtórzeń, to ilość takich wariacji bez powtórzeń wynosi

$$\binom{n}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad k = 0, 1, ..., n.$$

  Gdy $k = n$, to mamy do czynienia z permutacją zbioru $n$-elementowego i liczba takich **permutacji** wynosi $n!$

# Podstawowe schematy kombinatoryczne

- **Wariacją** $k$-elementową zbioru $n$-elementowego.
  a) Gdy dopuszczamy możliwość powtórzeń, to ilość takich wariacji z powtórzeniami wynosi

$$n^k \qquad k = 0, 1, ..., n$$

# Przykłady

## Przykład 2

W szufladzie są dwie skarpety na prawą nogę i jedna na lewą nogę. Prawdopodobieństwo, że losowo wybierając dwie skarpety otrzymamy parę równe jest $\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}$, zaś prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwu prawych wynosi $\frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$. Do szuflady dołożono jedną skarpetę. Jaka to jest skarpeta, skoro teraz prawdopodobieństwo, że wylosowane dwie skarpety stanowią parę, wynosi $\frac{1}{2}$?

# Rozwiązanie

Mamy $n = 4$ skarpetki. Skarpet prawych jest $p$ i lewych jest $l$. Oczywiscie $n = p + l$ i $p \geqslant 2$, $l \geqslant 1$. Prawdopodobieństwo, że losowo wybierając dwie skarpety otrzymamy parę jest teraz równe

$$\frac{\binom{p}{1}\binom{l}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{2p(n-p)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Zatem rozwiazując równanie otrzymujemy

$$p^2 - 4p + 3 = 0$$

otrzymujemy $p = 3$. Zatem dołożono prawą skarpetę

# Prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych o różnych wartościach

## Definicja

Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z $n$ elementów, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ i niech prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia elementarnego $\omega_i$ wynosi $P(\{\omega_i\})$ dla $i = 1, 2, ..., n$. Wówczas dla każdego zdarzenia $A \subset \mathcal{F}$, prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}).$$

Definicję powyższą można na mocy trzeciej własności aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa uogólnić na przypadek przestrzeni zdarzeń elementarnych o nieskończonej, ale przeliczalnej liczbie elementów, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$

# Przykłady

## Przykład 3

Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie dwa razy pod rząd na tę samą stronę. Określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ odpowiadającą temu eksperymentowi dla monety symetrycznej. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonamy mniej niż 7 i więcej niż 2 rzuty

# Rozwiązanie

- Przestrzeń probabilistyczna:
  a) $\Omega = \{OO, ROO, OROO, \ldots\} \cup \{RR, ORR, RORR, \ldots\}$
  b) zbiór zdarzeń $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, bo przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest przeliczalna
  c) dla monety symetrycznej
  $p_{i,O} = P(i \text{ rzutów } (OO \text{ na końcu})) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$
  $p_{i,R} = P(i \text{ rzutów } (RR \text{ na końcu})) = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad \text{gdzie } i = 2, 3, \ldots$
  Przestrzeń probabilistyczna jest dobrze określona, bo $p_{i,O}$, $p_{i,R} \geqslant 0$ dla dowolnego $i \geqslant 2$ oraz

$$\sum_{i=2}^{\infty}(p_{i,O} + p_{i,R}) = \sum_{i=2}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

# Rozwiązanie cd.

- Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$="mniej niż 7 i więcej niż 2 rzuty"="3, 4, 5 lub 6 rzutów":

$$\sum_{i=3}^{6}(p_{i,O}+p_{i,R}) = 2\cdot\frac{1}{8}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = \frac{15}{32}$$

# Prawdopodobieństwo geometryczne

## Definicja

W wielu zagadnieniach zbiór $\Omega$ można przedstawić jako podzbiór borelowski przestrzeni $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}^2$) lub ($\mathcal{R}^3$), który ma skończoną miarę $m$ - długość (pole, objętość). Dla zdarzenia losowego $A \subset \Omega$, dla którego tę miarę potrafimy obliczyć, prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ zdefiniowane jest wzorem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Zbiory borelowskie w $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$) to najmniejsza rodzina podzbiorów prostej (płaszczyzny, przestrzeni) o własnościach rodziny $\mathcal{F}$, która zawiera przedziały (koła, kule)

# Przykłady

## Przykład 4

W każdej chwili odcinka czasu $T$ jednakowo możliwe jest nadejście do odbiornika każdego z dwu sygnałów, które w tym odcinku czasu zostaną przesłane. Odbiornik nie może przyjąć drugiego sygnału, jeżeli nadejdzie on w czasie krótszym niż $\tau$ od chwili nadejścia pierwszego sygnału. Obliczyć prawdopodobieństwo przyjęcia przez odbiornik obu sygnałów

# Rozwiązanie

- Niech $x$ i $y$ oznaczają czasy nadejścia sygnałów do odbiornika. Wtedy przestrzeń zdarzeń elementarnych

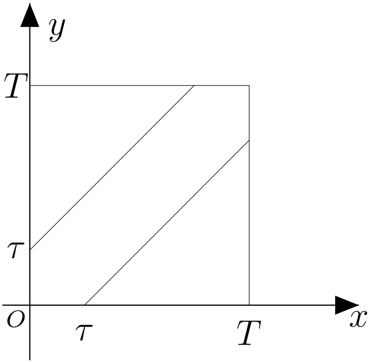
$$\Omega = \{(x, y) : \;\; x, y \in [0, T]\}$$

możemy interpretować jako kwadrat o boku $T$ a interesujące nas zdarzenie można zapisać w postaci

$$A = \{(x, y) \in T \times T : |x - y| \geqslant \tau\}.$$

Koniecznie wykonać rysunek!
$\mathcal{F}$ to borelowskie podzbiory $\Omega$, $P$ - prawdopodobieństwo geometryczne.

# Rozwiązanie cd.




- Zatem

$$P(A) = \frac{(T-\tau)^2}{T^2} = \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$$