Znajdowanie pozostałych pierwiastków liczby zespolonej, gdy znany jest jeden pierwiastek

1 Wprowadzenie

Okazuje się, że gdy znamy jeden z pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z, to pozostałe pierwiastki możemy wyznaczyć bez konieczności przedstawiania liczby z w postaci trygonometrycznej.

Przypomnijmy najpierw, w jaki sposób znajdujemy pierwiastki z liczby zespolonej, gdy dana jest jej postać trygonometryczna.

Niech $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ będzie liczbą zespoloną, gdzie $r > 0$ i niech $n \in N$. Wówczas istnieje n różnych liczb zespolonych w, spełniających równanie $w^n = z$ i liczby te dane są wzorem:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,(\cos\psi_k + i\sin\psi_k) \tag{1}$$

$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, gdzie:

$$\psi_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n} \tag{2}$$

$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Przykład 1. Wyznaczymy pierwiastki stopnia 3 z liczby zespolonej

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

We wzorach (1) i (2) podstawiamy $n = 3$, $r = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, a następnie kolejno $k = 0, 1, 2$:

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

□

Do przykładu tego wrócimy jeszcze w dalszej części.

Zdarzają się sytuacje, gdy pierwiastkowanej liczby z nie da się przedstawić w postaci trygonometrycznej bez użycia kalkulatora.

Przykład 2. Niech $z = 3 + 5i$. Moduł liczby z jest równy $\sqrt{34}$. Jeśli napiszemy:

$$z = \sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}} + \frac{5}{\sqrt{34}}i\right)$$

to widzimy, że znalezienie kąta ψ, dla którego $\cos\phi = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$ i $\sin\phi = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$ jest niemożliwe bez użycia kalkulatora. (uwaga ogólna: nawet jeśli w jakichś konkretnych przypadkach jesteśmy w stanie wyznaczyć argument liczby przy pomocy odpowiednich zabiegów algebraicznych, często jest to bardzo skomplikowane rachunkowo).

$\square$

Następny przykład ilustruje sytuację, w której jeden z pierwiastków jest łatwy do znalezienia, natomiast nie jest jasne, jak wyznaczyć pozostałe pierwiastki.

Przykład 3. Rozważmy równanie $z^6 = (3 + 5i)^6$. Wiemy, że równanie to ma 6 różnych rozwiązań – są to wszystkie pierwiastki stopnia 6 z liczby zespolonej $(3 + 5i)^6$. Aby wyznaczyć te pierwiastki na podstawie wzorów (1) i (2), musielibyśmy znaleźć postać trygonometryczną tej liczby, co – jak widzieliśmy powyżej – jest bez użycia kalkulatora niemożliwe.

Z drugiej strony widzimy, że jednym z rozwiązań naszego równania, a więc jednym z pierwiastków 6 stopnia z liczby $(3 + 5i)^6$, jest oczywiście liczba $3 + 5i$.

$\square$

W następnej części dowiemy się, jak w sytuacji opisanej w Przykładzie 3 wyznaczyć pozostałe pierwiastki.

2 Pierwiastek główny i pożytki z niego

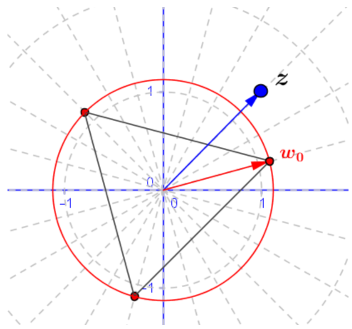
W Przykładzie 1 otrzymaliśmy następujące pierwiastki stopnia 3 liczby $1 + i$:

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

Liczby $\frac{\pi}{12}, \frac{3}{4}\pi, \frac{17}{12}\pi$ to argumenty główne kolejnych pierwiastków. Widzimy, że najmniejszą z tych liczb jest $\frac{\pi}{12}$, czyli argument główny pierwiastka w_0. Ilustruje to rysunek poniżej:



Ten spośród wszystkich pierwiastków stopnia n z niezerowej liczby zespolonej z, który ma najmniejszy dodatni argument główny, nosi nazwę *pierwiastka głównego*.

Definicja 1. *Pierwiastkiem głównym stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy ten z pierwiastków, który ma najmniejszy dodatni argument główny.*

Popatrzmy jeszcze raz na wzór (2):

$$\psi_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$$

i przyjmijmy, że liczba ϕ jest argumentem głównym liczby $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Widzimy od razu, że:

- jeżeli $\phi > 0$, to pierwiastkiem głównym stopnia n liczby z jest w_0, ponieważ wyrażenie ψ_k przyjmuje najmniejszą wartość dodatnią $\frac{\phi}{n}$ dla $k = 0$;
- jeżeli $\phi = 0$, to pierwiastkiem głównym stopnia n liczby z jest w_1, ponieważ wyrażenie ψ_k przyjmuje najmniejszą wartość dodatnią $\frac{2\pi}{n}$ dla $k = 1$.

2.1 Pierwiastek główny z liczby 1 – "producent" pozostałych pierwiastków

Jeżeli zastosujemy wzory (1) i (2) do liczby zespolonej $1 = \cos 0 + i\sin 0$, to widzimy, że jej pierwiastki stopnia n są równe:

$$\epsilon_0 = \cos\frac{0}{n} + i\sin\frac{0}{n} = 1,$$
$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{2\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{2\cdot 2\pi}{n},$$
$$\ldots$$
$$\epsilon_{n-1} = \cos\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}$$

(uwaga: pierwiastki liczby 1 często oznaczane są symbolem ϵ_k zamiast w_k).

Widzimy, że pierwiastek główny liczby 1 to ϵ_1. Jego argument główny to $\frac{2\pi}{n}$.

Przykład 4.

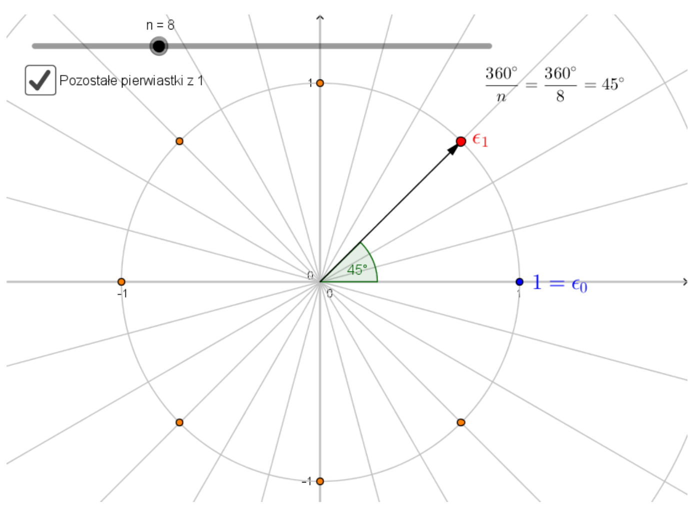
Pierwiastek główny stopnia 2 z liczby 1 to $\cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = -1$

Pierwiastek główny stopnia 3 z liczby 1 to $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pierwiastek główny stopnia 4 z liczby 1 to $\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i$

□

Rysunek poniżej przedstawia obszar grafiki okna Geogebry, w którym pokazano całą sytuację w przypadku $n = 8$. Możesz poeksperymentować na żywo z interaktywną ilustracją Geogebry tutaj.



Pierwiastki stopnia n z liczby 1 mają ciekawą własnosć. Zauważmy mianowicie, że dla każdej liczby naturalnej k, takiej że $1 \leqslant k \leqslant n-1$, możemy napisać:

$$\epsilon_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \left(\cos k\cdot\frac{2\pi}{n} + i\sin k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \epsilon_1^k$$

Wykazaliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeżeli ϵ_1 oznacza pierwiastek główny z liczby 1, to pozostałe pierwiastki stopnia n liczby 1 są równe:

$$\epsilon_k = \epsilon_1^k \tag{3}$$

$(k = 1, \ldots, n-1)$.

3 Pierwiastki z jedynki w akcji

Przekształćmy wzór na pierwiastek w_k stopnia n z liczby $z = r(cos\phi + isin\phi)$, gdzie $\phi > 0$ jest argumentem głównym liczby z:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi}{n} + i\sin\frac{\phi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = w_0\cdot\epsilon_k = w_0\cdot\epsilon_1^k$$

Widać, że gdy znamy pierwiastek główny stopnia n liczby z, to pozostałe pierwiastki możemy otrzymać jako iloczyny w_0 i kolejnych pierwiastków stopnia n z liczby 1. Tak więc mamy $w_1 = w_0\cdot\epsilon_1$, $w_2 = w_0\cdot\epsilon_1^2 = w_1\cdot\epsilon_0$ i tak dalej.

Można udowodnić, że do "wyprodukowania" wszystkich pierwiastków liczby z jako iloczynów jednego z jej pierwiastków przez kolejne potęgi pierwiastka głównego z liczby 1 można użyć któregokolwiek pierwiastka w_k liczby z (a niekoniecznie pierwiastka głównego z tej liczby). Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2. Załóżmy, że liczba z_1 jest jednym z pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z. Wówczas pozostałe pierwiastki stopnia n z liczby z są równe:

$$z_2 = z_1\cdot\epsilon_1,\ \ z_3 = z_2\cdot\epsilon_1,\ \ \ldots,\ \ z_n = z_{n-1}\cdot\epsilon_1 \tag{4}$$

lub równoważnie:

$$z_2 = z_1\cdot\epsilon_1,\ \ z_3 = z_1\cdot\epsilon_1^2,\ \ \ldots,\ \ z_n = z_1\cdot\epsilon_1^{n-1} \tag{5}$$

gdzie ϵ_1 jest pierwiastkiem głównym stopnia n z liczby 1, $\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Przykład 5. Jednym z pierwiastków czwartego stopnia z liczby $z = (2+i)^4$ jest oczywiście liczba $w_1 = 2 + i$, będąca podstawą potęgi powyżej.

Pozostałe pierwiastki wyznaczamy następująco.

1. Wyznaczamy pierwiastek główny stopnia 4 z liczby 1: $\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i$.
2. Stosujemy wzór (4) i otrzymujemy:
   $w_2 = w_1 \cdot \epsilon_1 = (2+i)i = -1 + 2i$
   $w_3 = w_2 \cdot \epsilon_1 = (-1+2i)\,i = -2 - i$
   $w_4 = w_3 \cdot \epsilon_1 = (-2-i)\,i = 1 - 2i$

$\square$

Przykład 6. Rozwiązać równanie $z^4 = (3-i)^8$.

Zauważmy, że nasze równanie możemy zapisać jako:

$$z^4 = \left[(1-2i)^2\right]^4$$

Ponieważ $(1-2i)^2 = -3-4i$ (sprawdź to sam, mnożąc liczbę $1-2i$ przez siebie), więc równanie przyjmuje postać:

$$z^4 = (-3-4i)^4$$

Widać z niego, że mamy znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia 4 z liczby $(-3-4i)^4$. Jednym z tych pierwiastków jest oczywiście liczba $w_1 = -3-4i$. Pozostałe pierwiastki znajdziemy w podobny sposób, jak w poprzednim przykładzie, wykorzystując pierwiastek główny czwartego stopnia z liczby 1, a więc $\epsilon_1 = i$ z liczby 1:

$w_2 = w_1 \cdot \epsilon_1 = (-3-4i)i = 4 - 3i$
$w_3 = w_2 \cdot \epsilon_1 = (4-3i)\,i = 3 + 4i$
$w_4 = w_3 \cdot \epsilon_1 = (3+4i)\,i = -4 + 3i$

$\square$

Przykład 7. Rozwiązać równanie $z^3 = (2-i)^3$.

Rozwiązania naszego równania to pierwiastki stopnia 3 z liczby $(2-i)^3$. Jednym z tych pierwiastków jest oczywiście liczba $z_1 = 2 - i$. Wyznaczymy pozostałe pierwiastki, korzystając z Twierdzenia 2.

Pierwiastki stopnia 3 z liczby 1 są równe:

$\epsilon_0 = 1$
$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Wyznaczymy teraz pozostałe rozwiązania naszego równania (a więc pozostałe pierwiastki stopnia 3 z liczby $(2-i)^3$ na podstawie Twierdzenia 2.

Stosujemy wzór (4):

$$z_2 = z_1 \cdot \epsilon_1 = (2-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i$$

Widzimy w tym momencie, że jeśli będziemy wyznaczać postać algebraiczną pierwiastka z_3 na podstawie wzoru (4), to czeka nas dość kłopotliwe mnożenie:

$$z_3 = z_2 \cdot \epsilon_1 = \left[-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\right] \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Użyjmy więc wzoru (5):

$$z_3 = z_1 \cdot \epsilon_1^2 = z_1 \cdot \epsilon_2 = (2-i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)$$

$\square$

Ostatnie dwa przykłady pokazują, że w pewnych sytuacjach wygodnie jest stosować wzór (4), a w innych lepiej wykorzystać wzór (5). Ponieważ pamiętanie wzorów jest kłopotliwe, dobrze jest do całego zagadnienia podejść w następujący sposób. Mnożymy znany pierwiastek z_1 z liczby z przez odpowiedni pierwiastek główny z liczby 1 i oceniamy, w jaki sposób wygodniej będzie wyznaczać kolejne pierwiastki:

- mnożąc otrzymany wynik ponownie przez pierwiastek główny ϵ_1 z 1, czy też
- mnożąc z_1 przez pierwiastek ϵ_k z liczby 1.

Ćwiczenie Rozwiąż równania:
(a) $z^3 = (2+i)^3$, (b) $z^6 = (-1+2i)^{12}$,

P.Kajetanowicz