Algebra abstrakcyjna

Lista 1

1. W grupie multiplikatywnej G definiujemy indukcyjnie potęgę elementu $a \in G$ następująco: $a^0 = 1$ oraz $a^{k+1} = (a^k) \cdot a$ dla $k \in N$; ponadto, dla $k \in N$, $a^{-k} = (a^k)^{-1}$. Udowodnić wzory:

   $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ dla dowolnych $r, s \in \mathbb{Z}$,

   $a^{rs} = (a^r)^s$ dla dowolnych $r, s \in \mathbb{Z}$,

   $a^{-r} = (a^r)^{-1}$ dla każdego $r \in \mathbb{Z}$.

2. Zauważyć, że w każdej grupie zachodzą równości

   $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$,

   $(a^{-1})^{-1}$.

3. Dowieść, że jeśli w grupie G zachodzi $x^2 = 1$ dla dowolnego $x \in G$, to grupa jest abelowa.

4. Udowodnić, że warunki (1-3) w definicji grupy są niezależne podając przykłady zbiorów z działaniem $\circ$ i elementem e, takie że dwa z warunków są spełnione, a trzeci nie.

5. Udowodnić, że każda grupa cykliczna jest abelowa.

6. wykazać, że każda grupa rzędu parzystego zawiera element rzędu 2.

7. (Alternatywna definicja parzystości permutacji). *Inwersją* dla permuatacji

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

   nazywamy każdą parę $(i, j), i < j$, taką że $\sigma(i) > \sigma(j)$. Definiujemy: permutacja jest *parzysta*, jeśli ilość jej inwersji jest parzysta; w przeciwnym razie, jest *nieparzysta*. Udowodnić, że dla dowolnej transpozycji sąsiednich liczb $\tau = (i, i+1)$, oraz dowolnej permutacji σ, parzystości permutacji σ i $\sigma\tau$ są różne.

8. Udowodnić to samo co wyżej dla dowolnej transpozycji $\tau = (k, \ell)$ i wyciągnąć stąd wniosek, że każdy rozkład permutacji parzystej na iloczyn transpozycji ma parzystą ilość czynników. (Podobnie dla permutacji nieparzystej).

9. W grupie S_4 wyznaczyć wszystkie elementy σ spełniające warunek $\sigma^4 = \mathrm{id}$.

10. Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy S_3.