Algebra abstrakcyjna
Lista 10

1. Niech $f \in \mathbb{Z}[x]$. Wykazać, że jeśli f jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$, to jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.

2. *Kryterium Eisensteina.* Wykazać, że jeśli liczba pierwsza p dzieli wszystkie współczynniki wielomianu $f(x) = a_0 + a_1x + \dots a_n n^n$ z wyjątkiem a_n, a pierwszy a_0 nie jest podzielny przez p^2, to $f(x)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.

   Uwaga: Powyższe dwa twierdzenia prawdziwe są dla dowolnego pierścienia całkowitego z jednoznacznością rozkładu i jego ciała ułamków.

3. Wykazać, że liczby $\sqrt{2+\sqrt{5}}$, $1 - i\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ są algebraiczne. Wyznaczyć stopień $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

4. Wykazać, że liczba zespolona $a + bi$ jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy gdy liczby rzeczywiste a i b są algebraiczne.

5. Udowodnić że liczby $\cos 1^\circ$ oraz $\sin 1^\circ$ są algebraiczne.

6. Czy kwadrat liczby przestępnej może być liczbą algebraiczną? A pierwiastek z liczby przestępnej?

7. Pozbyć się niewymierności w mianowniku wyrażenia:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8}}.$$

   Wskazówka Skorzystać z dowodu twierdzenia, że $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) = Q[\sqrt[5]{2}]$.

8. Udowodnić, że $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

9. Niech $F \subseteq K$ oraz elementy $a, b \in K$ będą takie, że ich stopnie p i q nad F są względnie pierwsze. Wykazać, że $[F(a,b) : F] = pq$.

10. Podać przykład dwóch liczb algebraicznych a i b stopni 2 i 3 odpowiednio, takich że stopień ab jest mniejszy niż 6.