Algebra abstrakcyjna
Lista 2

1. Udowodnić, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

2. Niech C_n będzie grupą cykliczną rzędu n. Udowodnić że dla każdej liczby k dzielącej n istnieje dokładnie jedna podgrupa C_n rzędu k.

3. Załóżmy, że $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ jest nieskończonym (rosnącym) ciągiem podgrup grupy G. Wykazać, że suma mnogościowa tego ciągu też jest podgrupą grupy G. Czy jest równa grupie G?

4. Niech p będzie liczba pierwszą. Pokazać, że grupa $C_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{p^k}$ pierwiastków z jedynki stopnia p^k nie jest cykliczna, ale każda jej podgrupa właściwa jest cykliczna.

5. H jest podzbiorem grupy G o własności: $ab \in H$ dla każdych $a, b \in H$. Czy to jest podgrupa? Uzasadnić.

6. A i B są podgrupami grupy G. Czy $A \cap B$ oraz $A \cup B$ też są podrupami grupy G? Uzasadnić.

7. Pokazać, że grupa S_3 jest grupą izometrii trójkąta równobocznego.

8. Wykazać, że półgrupa G (czyli zbiór $(G, \cdot)$ z działaniem łącznym $\cdot$, w której

   a) istnieje element $e \in G$ taki, że $xe = x$ dla każdego $x \in G$,

   b) dla każdego $x \in G$ istnieje $x' \in G$ taki, że $xx' = e$,

   jest grupą.

9. Niech $P(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów niepustego zbioru X. Czy $P(X)$ jest grupą względem różnicy (przekroju, sumy) zbiorów? A względem różnicy symetrycznej $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

10. Niech A i B będą właściwymi podgrupami grupy G. Pokazać, że $G \neq A \cup B$. Podać przykład grupy, która jest sumą mnogościową trzech właściwych podgrup.