

## Algebra abstrakcyjna

### Lista 3

1. Niech  $A$  i  $B$  będą właściwymi podgrupami grupy  $G$ . Pokazać, że  $G \neq A \cup B$ . Podać przykład grupy, która jest sumą mnogościową trzech właściwych podgrup.
2. Pokazać, że grupa, której rząd jest liczbą pierwszą jest izomorficzna z  $\mathbb{Z}_p$ . Następnie, pokazać, że jeżeli  $G$  nie zawiera właściwych podgrup, to  $G$  jest izomorficzna z  $\mathbb{Z}_p$ .
3. Kiedy zbiór rzeczywistych macierzy kwadratowych ustalonego stopnia jest grupą względem mnożenia (dodawania) macierzy? Czy jest to grupa przemienna? W szczególności sprawdzić jak jest dla zbioru macierzy  $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
4. Sprawdzić, czy zbiór funkcji rzeczywistych postaci  $f(x) = ax + b$  jest grupą względem składania funkcji. Kiedy jest to grupa przemienna?
5. Sprawdzić, czy zbiór  $R \times R$  z działaniem

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

jest grupą. Czy jest jakiś związek z grupą z poprzedniego zadania?

6. Wykazać, że jeżeli  $G$  jest grupą abelową, to podzbiór  $G^2 = \{g^2 : g \in G\}$  jest podgrupą. Podać przykład nieabelowej grupy  $G$ , dla której  $G$  nie jest podgrupą.
7. Udowodnić, że jeżeli  $p > 5$  jest liczbą pierwszą, to  $p^4 - 1$  jest podzielne przez 240. W tym celu wykazać najpierw, że w grupach  $\mathbb{Z}_m^*$ , dla  $m = 3, 5, 16$  wszystkie elementy spełniają warunek  $x^4 = 1$ .
8. Niech  $p > 2$  będzie liczbą pierwszą i niech  $G$  będzie zbiorem macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie  $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$ . Wykazać, że  $G$  z działaniem mnożenia macierzy jest grupą nieabelową oraz, że każdy element  $g \in G$  spełnia równość  $g^p = e$ .

9. Wykazać, że jeśli w grupie jest tylko jeden element rzędu 2 to jest on przemienny z każdym elementem grupy.
10. Niech  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . Pokazać, że grupy  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  oraz  $(\mathbb{R}, +)$  są izomorficzne. Czy izomorfizm jest wyznaczony jednoznacznie?