Algebra abstrakcyjna
Listy 4-6

1. Niech $\phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Czy z przemienności (nieprzemienności) grupy G wynika przemienność (nieprzemienność) grupy H ?

2. Wiemy, że w odwzorowaniu homomorficznym obraz podgrupy (normalnej) jest podgrupą (normalną). Udowodnić analogiczne twierdzenia dla przeciwobrazów.

3. Czy grupa może być izomorficzna ze swoją podgrupą właściwą?

4. Podać przykład grupy G dla której: a) $Z(G) = G$, b) $Z(G)$ ma tylko jeden element.

5. Wykazać, że dla grup A, B zachodzi $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$.

6. Wykazać, że jeśli $G/Z(G)$ jest grupą cykliczną, to $G = Z(G)$.

7. Czy istnieje grupa G w której wszystkie podgrupy $H \neq \{e\}$ są:

   a) izomorficzne między sobą,

   b) izomorficzne z G,

   c) są cykliczne, ale G nie jest cykliczna?

8. Narysować warstwy grupy $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ względem podgrupy generowanej przez element:
   a) $(1, 0)$,
   b) $(1, 1)$.

9. Niech $\mathcal{M}_n$ będzie multiplikatywną grupą macierzy zespolonych stopnia $n > 1$. Czy odwzorowanie $h : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n-1}$ polegające na odrzuceniu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny jest homomorfizmem grup? Jeśli tak, to wyznaczyć jego jądro.

10. W multiplikatywnej grupie $T(a, b)$ macierzy rzeczywistych postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $a \neq 0$, wydzielamy dwa podzbiory: $T(1, b)$ oraz $T(a, 0)$. Który z nich jest dzielnikiem normalnym? Jak wyglądają warstwy?

11. Uzasadnić, że grupa w której wszystkie elementy spełniają warunek $x^2 = e$ jest sumą prostą pewnej liczby grup cyklicznych tego samego rzędu.

12. Wyznaczyć liczbę nieizomorficznych grup przemiennych rzędu $n < 40$.

13. Wykazać, że grupa G/H jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy jej komutant $[G, G]$ jest zawarty w H.

14. Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy S_3. Które z nich są normalne?

15. Jak własności grupy determinują własności tabelki grupy? Czy wiersz (albo kolumna) tabelki grupy może mieć dwa jednakowe elementy? Narysować wszystkie możliwe tabelki dla grupy 4-elementowej. Wyznaczyć wszystkie grupy rzędu $\leqslant 7$.

16. Wykazać, że zbiór $Aut(G)$ automorfizmów grupy G z operacją składania funkcji tworzy grupę.

17. Wykazać, że dla jeśli $|G| > 2$, to $|Aut(G)| > 1$.

18. Wykazać, że zbiór $Aut_w(G)$ wszystkich *automorfizmów wewnętrznych* grupy G jest dzielnikiem normalnym grupy $Aut(G)$.

19. Pokazać, że rząd grupy $Aut_w(G)$ jest dzielnikiem liczby $(n-1)!$. A rząd grupy $Aut(G)$?

20. Udowodnić, że grupa G jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $h : G \times G \to G$ dane wzorem $h(g_1, g_2) = g_1 g_2$ jest homomorfizmem grup.

21. Niech H będzie podgrupą G. Wykazać, że $N = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ jest podgrupą normalną G.

22. Czy relacja bycia podgrupą normalną jest przechodnia? To znaczy, czy prawdą jest, że jeśli $A \trianglelefteq B$ oraz $B \trianglelefteq C$, to $A \trianglelefteq C$?

23. Udowodnić, że jeśli grupa G ma podgrupę normalną o indeksie 4, to ma też podgrupę normalną o indeksie 2.

24. Wykazać, że jeśli grupa zawiera dokładnie jeden element rzędu 2, to należy on do centrum grupy, natomiast grupa, która ma dokładnie dwa elementy rzędu 2 nie istnieje.

25. Niech G będzie grupą abelową, a S jej podgrupą złożoną z elementów rzędu skończonego. Udowodnić, że w grupie G/S wszystkie elementy poza neutralnym mają rząd nieskończony.

26. Dany jest homomorfizm grupy A_4 na grupę G. Jaki rząd może mieć grupa G?

27. Grupę izometrii n-kąta foremnego nazywamy grupą *dihedralną* i oznaczamy D_n. Wyznaczyć rzad tej grupy, generatory, podgrupy, podgrupy normalne, centrum i komutant.

28. Pokazać, że $D_6 \cong D_3 \times C_2$.

29. Udowodnić, że dla liczby pierwszej p, grupa dihedralna D_p nie rozkłada się na iloczyn prosty.

30. Używając wzoru Burnside'a obliczyć ilość różnych naszyjników, jakie można utworzyć z 6 koralików: 3 czerwonych, dwóch zielonych i jednego niebieskiego.

31. Ile jest różnych pokolorowań ścian sześcianu trzema kolorami?