Algebra abstrakcyjna
Lista 7

1. Pokazać że zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniami $a \oplus b = a + b + 1$ oraz $a \odot b = a + b + ab$ jest pierścieniem całkowitym.

2. Pokazać że zbiór funkcji postaci $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ z dodawaniem i mnożeniem funkcji jest pierścieniem z dzielnikami zera.

3. Wykazać,że jeśli w pierścieniu $(P, +, \cdot)$ grupa $(P, +)$ jest cykliczna, to pierścień jest przmienny.

4. Co można powiedzieć o pierścieniu w którym mnożenie pokrywa się z dodawaniem, tzn. $xy = x + y$?

5. Pokazać, że zbiór podzbiorów $P(X)$ dowolnego zbioru X z jakimi działaniami

   $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ oraz $A \cdot B = A \cap B$

   jest pierścieniem przemiennym z jedynką spełniającym warunek $x^2 = x$?

6. Pierścień w którym $x^2 = x$ dla wszystkich x nazywa się pierścieniem Boole'a. Udowodnić, że każdy pierścień Boolea'a jest przemienny. (Wsk. rachunek nie jest oczywisty, ale po kilku próbach wychodzi).

7. Czy pierścień Boole'a musi mieć jedynkę?

8. Zdefiniować iloczyn prosty pierścieni. Pokazać, że naturalne operacje na iloczynie kartezjańskim dają pierścień. Sprawdzić, jakie własności pierścieni przenoszą się na ich iloczyn prosty.

9. Wykazać, że jeśli K jest ciałem, to zbiór F macierzy postaci $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, gdzie $a, b \in K$ z działaniami dodawania i mnożenia macierzy jest pierścieniem przemiennym. udowodnić, że dla $K = \mathbb{Q}$ lub $K = \mathbb{R}$, F jest ciałem. A jak jest dla $K = \mathbb{C}$?

10. Niech G będzie grupą elementów odwracalnych pierścienia macierzy $M_2(\mathbb{Z}_p)$. Wyznaczyć rząd grupy G i jej centrum, oraz podać przykład p-podgrupy Sylowa w G.