Algebra abstrakcyjna
Lista 8

1. Udowodnić, że jeśli I, J są ideałami pierścienia R, to $I + J$ oraz $I \cap J$ są też ideałami R.
2. W pierścieniu liczb całkowitych wyznaczyć ideały: $(3) + (7), (4) + (6), (3) \cap (7), (4) \cap (6)$.
3. Udowodnić, że jeśli m, n są względnie pierwsze, to $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.
4. Wykazać, że $M = \{x(2+i) : x \in \mathbb{Z}[i]\}$ jest ideałem maksymalnym pierścienia $\mathbb{Z}[i]$. Ile elementów ma ciało $\mathbb{Z}[i]/M$?
5. Wykazać, że $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_m$.
6. Czy istnieją nietrywialne homomorfizmy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ w $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$? A odwrotnie?
7. Wyznaczyć grupę elementów odwracalnych pierścienia $\mathbb{Z}[c]$, gdzie $c = \dfrac{-1+3i}{2}$.
8. Wyznaczyć wszystkie automorfizmy pierścienia $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.
9. Element a pierścienia całkowitego R, niezerowy i nieodwracalny, nazywa się elementem *pierwszym*, jeśli dla dowolnych $b, c \in R$ z tego że $a|bc$ wynika, że $a|b$ lub $a|c$. Udowodnić, że w pierścieniu z jednoznacznością rozkładu element a jest pierwszy wtedy i tylko wtedy gdy jest nierozkładalny.
10. (*) Podać przykład pierścienia całkowitego nie będącego ciałem, który nie ma elementów nierozkładalnych.