Algebra abstrakcyjna
Lista 9

1. Podać przykład pierścienia całkowitego R i elementu nierozkładalnego $a \in R$, takiego że a nie jest elementem pierwszym.

2. Ideał I pierścienia pierwszego nazywamy *pierwszym*, jeśli dla dowolnych $a, b \in R$ z tego, że $ab \in I$ wynika, że albo $a \in I$ albo $b \in I$. Pokazać:

   (i) element $a \in R$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy gdy ideał główny (a) jest pierwszy;

   (ii) ideał $I \lhd R$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy gdy pierścień ilorazowy R/I jest całkowity.

3. Udowodnić, że w pierścieniu ideałów głównych R dla każdych elementów $a, b \in R$ istnieje dobrze zdefiniowany największy wspólny dzielnik NWD(a, b).

4. Udowodnić, że w pierścieniu ideałów głównych, dla dowolnych elementów a, b, równanie Bézout $ax + by =$NWD(a, b) ma rozwiązanie.

5. Wykazać, że w pierścieniu ideałów głównych nie ma nieskończonych ciągów wstępujących ideałów $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ (gdzie wszystkie zawierania są właściwe).

6. Pokazać, że pierścień liczb całkowitych Gaussa $\mathbb{Z}[i]$ jest pierścieniem euklidesowym (a co za tym idzie jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu). Jakie są elementy odwracalne tego pierścienia? Wyznaczyć NWD$(1-2i, 3+5i)$ w tym pierścieniu. Jaki jest ideał $(1-2i)+(3+5i)$?

7. Wykazać izomorfizm ciał: $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$.

8. Wykazać, że wielomiany x^2+1 oraz x^3+x+4 są nierozkładalne w $\mathbb{Z}_{11}$.

9. Ile elementów mają ciała $\mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2+1)$ i $\mathbb{Z}_{11}[x]/(x^3+x+4)$.

10. Niech p będzie liczbą pierwszą. Jak skonstruować ciało p^k-elementowe?