poniedziałek, 11 marca 2024 11:17

WARSTWY $G \geqslant H$ $a \in G$

$Ha = \{ha : h \in H\}$ $\quad a \in Ha$ (bo $a = 1 \cdot a$)

▨ $\forall a,b \in G \quad Ha = Hb \vee Ha \cap Hb = \emptyset$

Dd: Zał. $x \in Ha \cap Hb \Rightarrow x = h_1 a = h_2 b$

$a = h_1^{-1} h_2 b \qquad Ha = \underbrace{H(h_1^{-1} h_2 b)}_{h \cdot h_1^{-1} \cdot h_2 \cdot b} \subseteq Hb$

$b = h_2^{-1} h_1 a$ . . . . . $\qquad Hb \subseteq Ha$ □

$\boxtimes$ $Ha = Hb \vee Ha \cap Hb = \emptyset$ — warstwy prawostronne i lewostr...

poniedziałek, 11 marca 2024 11:26

Ex. $S_3 \ni (1,2), (2,3)$ $H = \{id, (1,2)\}$, $H(2,3) = \{(2,3), (1,2,3)\}$

$(2,3)H = \{(2,3), (1,3,2)\}$

$(2,3)(1,2)$ różne

$\boxtimes$ Dla wst $a \in G \geq H$

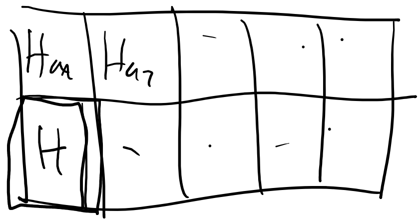
$f_a : H \to Ha : h \to ha$ jest bijekcją.

Dd $1-1$ zał. $h_1 a = h_2 a \Rightarrow | a^{-1}$ $h_1 a a^{-1} = h_2 a a^{-1} \Rightarrow h_1 = h_2$.

ha dow. $ha \in Ha$ — $h \to ha$

WN Dow. dwie warstwy są równoliczne (lew., praw) $= |H|$

Podział $G =$



$H = H \cdot 1$

ilość bloków $\stackrel{def}{=}$ indeks $|G : H|$

$\Downarrow$

$\boxtimes$ (LAGRANGE'A) $H \leq G$ sk. to $|G| = |H| \cdot |G : H|$

w szcz. rząd $H \mid$ rząd G.

UWAGA: To samo dla warstw lewostronnych. $\triangleright S_3$ 4

WN rząd $a \mid$ rząd G $\forall a \in G$. $a^n = 1$

$|\langle a \rangle|$

WN $|G| = p$ liczba pierwsza $\Rightarrow$ G cykliczna.

EX

poniedziałek, 11 marca 2024 11:43

możliwe rzędy

A_4 — $|A_4| = 12$ $\quad \underline{1, 2, 3, 4, 6, 12}$

1 — id $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1

2 — $\cancel{(k, l)}$ $\quad (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)$ — 3

3 $\quad (1,2,3), (1,3,2), \dots\dots (2,3,4)$ — 8

$\cancel{4}$ — $(1,2,3,4), \dots\ (\quad)$ — $\cancel{6}$

$(1,2)(2,3)(3,4)$

GRUPY CYKLICZNE

poniedziałek, 11 marca 2024 11:50

$1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$

$\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}_n, +)$

▷ ćw.

- ▨ Podgrupa gr. cykl. jest cykl. ▷ ćwicz.
- ▨ $|G| = n$ cykliczna, $\forall k | n$ $\exists!$ podgrupa rzędu k.

EX. $(C_n, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_n, +)$

pierw. st. n z 1

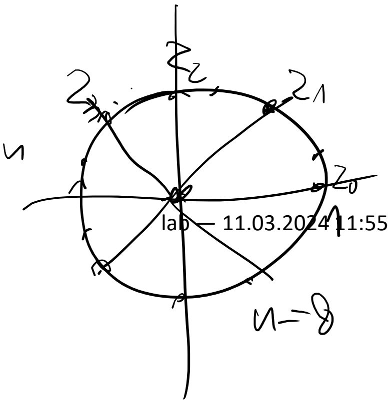
$\vee\!/$

$\{ |z| : z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$z_i \cdot z_k = z_{i+k}$ mod n

$z_i = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot i\right)$



lab — 11.03.2024 11:55

DEF $C_{p^\infty} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_{p^k}$ ▷ ćwicz

GIA

p - liczba pierwsza

a) PODGRUPA NORMALNA — DZIELNIK NORMALNY.

DEF $H \leq G$: $\underline{\underline{Ha = aH}}$ $\forall a \in G$ $\qquad H \trianglelefteq G$

(1) $|G:H| = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$ $\quad$ bo $\quad H, \boxed{Ha}$ $\quad \Rightarrow aH = Ha$

$S_n : A_n$ $\qquad\qquad\qquad\qquad H, \boxed{aH}$

$xH = H$. $x \in H$

$\underline{\text{UWAGA}}$: $b \in H\underline{a} \Rightarrow \underline{\underline{Ha = Hb}}$

reprezentant

(2) $H \triangleleft G \iff \underline{x^{-1}Hx = H}$ $\forall x \in G \iff x^{-1}Hx \subseteq H$ $\forall x \in G$

$x^{-1}hx$

$\underline{\text{D-d}}$ $\quad x^{-1}Hx = x^{-1}(Hx) = x^{-1}(xH) = (x^{-1}x)\cdot H = H.$

$\Rightarrow$

(2) $\Rightarrow$ (3) trywialne

(3) $\Rightarrow$ (1) $\quad \underline{\underline{Hx}} = \underline{xx^{-1}Hx} = x(x^{-1}Hx) \subseteq \underline{\underline{xH}}.$

$\qquad xH = (\underline{xHx^{-1}})x \subseteq Hx.$

poniedziałek, 11 marca 2024 11:59

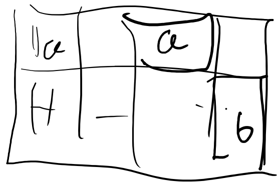
DEF $H \triangleleft G \quad Ha = aH \underset{\text{ozn.}}{=} [a] \quad \forall a$

poniedziałek, 11 marca 2024 12:14

DEF $[a]\cdot[b] = [a\cdot b]$ — poprawność definicji?

$a, b \in G \quad \| \qquad\qquad \|?$

$[a_1]\cdot[b_1] = [a_1\cdot b_1]$



nie zależy od wyboru reprezent. bloków $[ab]$

Rzeczywiście: $[a]=[a_1], \ [b]=[b_1] \Rightarrow$

$a = h_1 a_1, \ b = h_2 b_1 \Rightarrow a\cdot b = \boxed{h_1 a_1}\cdot h_2 \cdot b_1 =$

$\cancel{a = a_1 h_3}$ $\quad = a_1 h_3 \cdot h_2 \cdot b_1 = a_1 h' b_1 = h'' a_1 \cdot b_1 \in [a_1 b_1]$

$H \triangleleft G$ TA SAMA WARSTWA.

$\{Ha : a \in G\} \underset{\text{def}}{=} G/H$ — grupa ILORAZOWA.

$\boxed{?}$ $[a]\cdot[b] = [ab]$ — spełnia aks. grup.

Łączność — $([a]\cdot[b])[c] = [ab]\cdot[c] = [a\cdot b\cdot c)$ . . . .

element $H = [1] \qquad [1]\cdot[a] = [a]$

elem. odw. $\quad [a]\cdot[a^{-1}] = [1]$

HOMOMORFIZM $(G, \circ), (H, *)$

poniedziałek, 11 marca 2024 12:24

DEF $\varphi: G \to H$: spełniające

$$\boxed{\forall g_1, g_2 \in G \quad \varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2)}$$

naz. homomorfizmem

„zachowuje działanie" grupowe

Fakt: φ-hom, to $\varphi(e_G) = \varphi(e_H)$ ← jedn.

$\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ ← el. odw.

$g \circ e_G = g$

$\varphi(g) * \varphi(e_G) = \varphi(g) \quad \Big| \ \varphi(g)^{-1} *$

$\varphi(e_G) = e_H$

$x \circ x^{-1} \overset{G}{=} e_G$

$\varphi(x) * \varphi(x^{-1}) = e_H \quad \Big| \ (\varphi(x))^{-1} *$

$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

JĄDRO HOM $\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e\}$

poniedziałek, 11 marca 2024 12:34

$\operatorname{Im}\varphi = \{h \in H : \exists g \in G \ \varphi(g) = h\}$

1-1 – monomorfizm – injekcja

na – epimorfizm – surjekcja

$\frac{1-1}{na}$ – izomorfizm – bijekcja.

$\square$ $\underline{G \rhd H}$, $\varphi: G \to G/H : g \to Hg$ jest
Odwz.
<u>epimorfizm</u> (kanoniczny)

<u>Dd</u> hom. $\varphi(g_1 \cdot g_2) = H(g_1 g_2)$

$\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = Hg_1 \circ Hg_2 \underset{\text{dn}}{=} H(g_1 \cdot g_2)$

epi – oczywiste

Wykład 2 (cd)

DEF. $H \leqslant G$ **podgrupa normalna**, jeśli $(\forall g \in G)\ \ gH = Hg$ piszemy $H \lhd G$ lub $H \unlhd G$

STW. $|G : H| = 2$, to $H \lhd G$

EX. $A_n \lhd S_n$

TWIERDZENIE. $H \lhd G \iff g^{-1}Hg = H$ (dla każdego $g \in G$)
$\iff g^{-1}Hg \subseteq H$ (dla każdego $g \in G$)

TWIERDZENIE. Zbiór warstw G/H z działaniem $Ha \cdot Hb = H(ab)$ tworzy grupę, zwaną **grupą ilorazową**.
Uwaga: poprawność definicji działania!

DEF. $(G, \circ), (H, *)$ grupy, to $f : G \to H$ **homomorfizm**, jeśli $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ dla wszystkich $a, b \in G$.
*Jeśli oba działania oznaczymy znakiem mnożenia, to warunek ma postać: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

STW. Homomorfizm zachowuje e oraz a^{-1}.

DEF. Jądro Ker$f$, Obraz Imf, mono, epi, izo.

STW. Ker$f \lhd G$

TWIERDZENIE. Odwzorowanie $\kappa : G \to G/H : g \to Hg$ jest epimorfizmem, i zwane jest **epimorfizmem kanonicznym**.

WN. Jądra $\longleftrightarrow$ podgrupy normalne

Wykład 3

TWIERDZENIE. (**o izomorfizmie**) Dla każdego homomorfizmu $f : G \to H$ istnieje dokładnie jeden izomorfizm $\phi : G/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$, taki że $f = \kappa \circ \phi$.

WN. Wszystkie homomorfizmy wyznaczone są (z dokładnością do *izo*) przez epimorfizmy kanoniczne.

WN. obrazy homomorficzne $\longleftrightarrow$ grupy ilorazowe

Ex. $f : S_n \to C_2 = \{-1, 1\}$ parzystość

Ex. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ reszta modulo n

Ex. $h : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* : M \to \det(M)$ (hom: Tw. Cauchy'ego)

*macierze nieosobliwe nad dowolnym ciałem $GL_n(K)$

Komutant grupy

Def. **Komutator** $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$

Def. **Komutant** $[G, G] = \big\langle [x, y] : x, y \in G \big\rangle$ podgrupa generowana przez komtatory

Stw. $[G, G] = \{[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_k, y_k] : x_i, y_i \in G, k \in \mathbb{N}\}$

Twierdzenie. $[G, G]$ jest podgrupą normalną G: $[G, G] \trianglelefteq G$

Centrum grupy

Def. $Z(G) = \{g \in G : (\forall x \in G)\ gx = xg\}$ **centrum grupy** G

Twierdzenie. $Z(G)$ jest podgrupą normalną G: $Z(G) \trianglelefteq G$

Klasyfikacja grup abelowych

Def. **Iloczynem prostym** grup G_1, G_2 nazywamy grupę na zbiorze $G_1 \times G_2$ z działaniem określonym "po osiach": $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ (sprawdzić, że grupa)

Stw.. Iloczyn prostych grup abelowych jest grupą abelową.

W przypadku zapisu addytywnego mówimy o **sumie prostej** i używamy zapisu $G_1 \oplus G_2$.

Twierdzenie. $A, B \leqslant G$ abelowa, $A \cap B = \{0\} \implies \langle A \cup B \rangle \cong A \oplus B$.

* Uogólnienia: więcej składników, nieabelowe $A, B \lhd G$

Twierdzenie. Abelowa $|G| = mn$, $(m,n) = 1 \implies$ ist. $G_1, G_2 \leqslant G$ takie, że $G \cong G_1 \oplus G_2$, $|G_1| = m$, $|G_2| = n$.

Ex. $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

Wn. abelowa $|G| = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ (p_i rożne liczby pierwsze) rozkłada się na sumę prostą swoich podgrup $G \cong G_1 \oplus \dots \oplus G_m$, gdzie $|G_i| = p_i^{k_i}$ (p-grupy).

abelowa p-grupa, $|G| = p^k$???

Twierdzenie. abelowa $|G| = p^k$, $a \in G$ najwyższego rzędu $\implies G \cong \langle a \rangle \oplus T$ dla pewnej $T \leqslant G$. (*dowód pomijamy*).

Twierdzenie. Każda skończona grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych.

Ex. Grupy abelowe rzędu 16 ???

Wykład 2 (cd)

Def. $H \leqslant G$ **podgrupa normalna**, jeśli $(\forall g \in G)\ \ gH = Hg$ piszemy $H \lhd G$ lub $H \unlhd G$

Stw. $|G : H| = 2$, to $H \lhd G$

Ex. $A_n \lhd S_n$

Twierdzenie. $H \lhd G \iff g^{-1}Hg = H$ (dla każdego $g \in G$)
$\iff g^{-1}Hg \subseteq H$ (dla każdego $g \in G$)

Twierdzenie. Zbiór warstw G/H z działaniem $Ha \cdot Hb = H(ab)$ tworzy grupę, zwaną **grupą ilorazową**.
Uwaga: poprawność definicji działania!

Def. $(G, \circ), (H, *)$ grupy, to $f : G \to H$ **homomorfizm**, jeśli $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ dla wszystkich $a, b \in G$.
*Jeśli oba działania oznaczymy znakiem mnożenia, to warunek ma postać: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Stw. Homomorfizm zachowuje e oraz a^{-1}.

Def. Jądro Ker$f$, Obraz Imf, mono (1-1), epi (na), izo. $\frac{1-1}{\text{na}}$

$g^{-1}Hg \subseteq H$
$x \in \mathrm{Ker} f \quad f(x)=1$
$f(g^{-1}xg) = f(g^{-1}) \cdot f(x) \cdot f(g) =$
$= (f(g))^{-1} \cdot f(g) = 1$

$\mathrm{Ker} f : \{x \in G : f(x) = 1$
$f(xy) = f(x) \cdot f(y) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} = 1^{-1} = 1$

Stw. Ker$f \lhd G$

Twierdzenie. Odwzorowanie $\kappa : G \to G/H : g \to Hg$ jest epimorfizmem, i zwane jest **epimorfizmem kanonicznym**.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & \mathrm{Im} f \subseteq H \\ & G/\mathrm{Ker} f \arrow[ur, "\varphi\ \frac{1-1}{\text{na}}"'] & \end{tikzcd}$$

diagram komutuje

Wn. Jądra $\longleftrightarrow$ podgrupy normalne

Wykład 3

Twierdzenie. (**o izomorfizmie**) Dla każdego homomorfizmu $f : G \to H$ istnieje dokładnie jeden izomorfizm $\phi : G/\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Im} f$, taki że $f = \kappa \circ \phi$.

Wn. Wszystkie homomorfizmy wyznaczone są (z dokładnością do *izo*) przez epimorfizmy kanoniczne.

Wn. obrazy homomorficzne $\longleftrightarrow$ grupy ilorazowe

Ex. $f : S_n \to C_2 = \{-1, 1\}$ parzystość

Ex. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ reszta modulo n

Ex. $h : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* : M \to \det(M)$ (hom: Tw. Cauchy'ego)

*macierze nieosobliwe nad dowolnym ciałem $GL_n(K)$

Komutant grupy

Def. **Komutator** $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$

Def. **Komutant** $[G, G] = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle$ podgrupa generowana przez komutatory

Stw. $[G, G] = \{[x_1, y_1][x_2, y_2] \ldots [x_k, y_k] : x_i, y_i \in G, k \in \mathbb{N}\}$

Twierdzenie. $[G, G]$ jest podgrupą normalną G: $[G, G] \trianglelefteq G$

Centrum grupy

Def. $Z(G) = \{g \in G : (\forall x \in G)\ gx = xg\}$ **centrum grupy** G

Twierdzenie. $Z(G)$ jest podgrupą normalną G: $Z(G) \trianglelefteq G$

Klasyfikacja grup abelowych

Def. **Iloczynem prostym** grup G_1, G_2 nazywamy grupę na zbiorze $G_1 \times G_2$ z działaniem określonym "po osiach": $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ (sprawdzić, że grupa)

Stw.. Iloczyn prostych grup abelowych jest grupą abelową.

W przypadku zapisu addytywnego mówimy o **sumie prostej** i używamy zapisu $G_1 \oplus G_2$.

Twierdzenie. $A, B \leqslant G$ abelowa, $A \cap B = \{0\} \implies \langle A \cup B \rangle \cong A \oplus B$.

* Uogólnienia: więcej składników, nieabelowe $A, B \lhd G$

Twierdzenie. Abelowa $|G| = mn$, $(m,n) = 1 \implies$ ist. $G_1, G_2 \leqslant G$ takie, że $G \cong G_1 \oplus G_2$, $|G_1| = m$, $|G_2| = n$.

Ex. $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

Wn. abelowa $|G| = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ (p_i rożne liczby pierwsze) rozkłada się na sumę prostą swoich podgrup $G \cong G_1 \oplus \dots \oplus G_m$, gdzie $|G_i| = p_i^{k_i}$ (p-grupy).

abelowa p-grupa, $|G| = p^k$???

Twierdzenie. abelowa $|G| = p^k$, $a \in G$ najwyższego rzędu $\implies G \cong \langle a \rangle \oplus T$ dla pewnej $T \leqslant G$. (*dowód pomijamy*).

Twierdzenie. Każda skończona grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych.

Ex. Grupy abelowe rzędu 16 ???

Wykład 2 (cd)

$H \lhd G$

Def. $H \lhd G$ **podgrupa normalna**, jeśli $(\forall g \in G)\ gH = Hg$ piszemy $H \lhd G$ lub $H \unlhd G$

Stw. $|G : H| = 2$, to $H \lhd G$

Ex. $A_n \lhd S_n$

Twierdzenie. $H \lhd G$ $\Leftarrow\Rightarrow$ $g^{-1}Hg = H$ (dla każdego $g \in G$)

$\Leftarrow\Rightarrow$ $g^{-1}Hg \subseteq H$ (dla każdego $g \in G$)

Twierdzenie. Zbiór warstw G/H z działaniem $Ha \cdot Hb = H(ab)$ tworzy grupę,

zwaną **grupą ilorazową**.

Uwaga: poprawność definicji działania!

Def. $(G,\circ),(H,*)$ grupy, to $f : G \to H$ **homomorfizm**, jeśli $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ dla wszystkich $a,b \in G$.

*Jeśli oba działania oznaczymy znakiem mnożenia, to warunek ma postać: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Stw. Homomorfizm zachowuje e oraz a^{-1}.

Def. Jądro Ker$f$, Obraz Imf, mono, epi, izo.

Stw. Ker$f \lhd G$

Twierdzenie. Odwzorowanie $\kappa : G \to G/H : g \to Hg$ jest epimorfizmem, i zwane jest **epimorfizmem kanonicznym**.

Wn. Jądra $\longleftrightarrow$ podgrupy normalne

$$g \longrightarrow f(g), \qquad g \longrightarrow (\operatorname{Ker}\varphi)g$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa"] & H \\ G/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd} \qquad \exists!\,\varphi$$

Wykład 3

Twierdzenie. (**o izomorfizmie**) Dla każdego homomorfizmu $f : G \to H$ istnieje dokładnie jeden izomorfizm $\varphi : G/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$, taki że $f = \cancel{\kappa \circ \varphi}$. $\varphi \circ \kappa$

Dowód $f(g) = (\varphi \circ \kappa)(g) = \varphi(\kappa(g)) = \underline{\varphi(\operatorname{Ker}\varphi \cdot g)}$!

$\forall g : \varphi(\operatorname{Ker} f \cdot g) = f(g) \qquad \operatorname{Ker}\varphi = H$

φ: hom $\quad \varphi(Hg \cdot Hg') = \varphi(Hg \cdot g') = f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g') = \varphi(Hg)\varphi(Hg')$

1-1 $\quad \operatorname{Ker}\varphi =$

$f(g) = 1$

Na

Wn. Wszystkie homomorfizmy wyznaczone są (z dokładnością do *izo*) przez epimorfizmy kanoniczne.

Wn. obrazy homomorficzne ←→ grupy ilorazowe

Ex. $f : S_n \to C_2 = \{-1, 1\}$ parzystość

$$f : S_n \longrightarrow \{-1,1\} = \operatorname{Im} f$$
$$S_n \searrow S/A_n \cong C_2, \quad \varphi$$

Ker· $\qquad f(\pi \circ \tau) = f(\pi) \circ f(\tau)$

$\operatorname{Ker}\varphi = A_n$

Ex. $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ reszta modulo n

$\operatorname{Ker}\varphi = \{nx : x \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} \qquad \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \underline{\underline{\mathbb{Z}_n}}$

Ex. $h : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* : M \to \det(M)$ (hom: Tw. Cauchy'ego) *macierze

$\varphi(M_1 \cdot M_2) = \det(M_1 \cdot M_2) = \det(M_1) \cdot \det(M_2) = \varphi(M_1) \cdot \varphi(M_2)$

$\operatorname{Ker} h = \{M : \det M = 1\} = SL_n(\mathbb{R})$

$GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$

nieosobliwe nad dowolnym ciałem $GL_n(K)$

Komutant grupy

G_1 H

Def. **Komutator** $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ $= g$

$[x,y] = e \iff x^{-1}y^{-1}xy = e \iff xy = yx$

Def. **Komutant** $[G,G] = \{[x,y] : x,y \in G\}$
podgrupa generowana przez komutatory

$[G,G] = \{e\} \iff G$ abelowa

Stw. $[G,G] = \{[x_1,y_1][x_2,y_2]\ldots[x_k,y_k] : x_i,y_i \in G, k \in \mathbb{N}\}$

$x^{-1}y^{-1}xy\,u^{-1}v^{-1}uv =$

$(xy)^{-1}(uv)^{-1}xyuv = y^{-1}x^{-1}v^{-1}u^{-1}xyuv$

$(yx)^{-1}$

$g^{-1}[x,y]g = g^{-1}x^{-1}gg^{-1}y^{-1}gg^{-1}xgg^{-1}yg \in [G,G]$

ćwicz

Twierdzenie. $[G,G]$ jest podgrupą normalną G: $[G,G] \trianglelefteq G$

$g^{-1}x^{-1}g\,g^{-1}y^{-1}g\,g^{-1}xg\,g^{-1}yg = [g^{-1}xg, g^{-1}yg]$

Centrum grupy

Def. $Z(G) = \{g \in G : (\forall x \in G)\ gx = xg\}$ **centrum grupy** G

xy^{-1}

Twierdzenie. $Z(G)$ jest podgrupą normalną G: $Z(G) \trianglelefteq G$

$gh \in Z(G)$ $\quad (gh)\cdot x = gxh = xgh.$ $\quad gh \in Z(G)$

$g \in Z(G)$ $\quad g^{-1}\cdot x \overset{?}{=} x\cdot g^{-1}$

$g^{-1}x = a$, $x = ga = ag$, $xg^{-1} = a$

$g \in Z(G)$

$h^{-1}gh \overset{?}{\in} Z(G)$ $\quad h^{-1}ghx = a$ $\quad ghx =$

$h^{-1}ghx \overset{?}{=} xh^{-1}gh \to xgh^{-1}h = xg$

$h^{-1}ghx = h^{-1}hgx = xg$

Klasyfikacja grup abelowych

Def. **Iloczynem prostym** grup G_1,G_2 nazywamy grupę na zbiorze $G_1 \times G_2$ z działaniem określonym "po osiach": $(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = (a_1b_1,a_2b_2)$ (sprawdzić, że grupa)

(e_1,e_2)

$(a,b)^{-1} = (a^{-1},b^{-1})$

Stw.. Iloczyn prostych grup abelowych jest grupą abelową.

$\oplus$

W przypadku zapisu addytywnego mówimy o **sumie prostej** i używamy zapisu $G_1 \oplus G_2$.

$a+b$

Twierdzenie. $A,B \leq G$ abelowa, $A \cap B = \{0\} \Longrightarrow \langle A \cup B\rangle \cong A \oplus B$. $\cong \langle A \cup B \rangle = A+B$

Dd $\varphi : A \oplus B \to A+B : (a,b) \mapsto a+b$

hom $\varphi((a,b) + (a',b')) = \varphi((a+a', b+b')) = a+a'+b+b'$

$\varphi(a+b) + \varphi(a'+b')$ $\qquad a+a'+b+b$

na – [illegible]

1-1 $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ $\qquad a+b = a'+b' = a-a' = b-b' \Rightarrow$

$a-a' = 0 = b-b'$

* Uogólnienia: więcej składników, nieabelowe $A,B \trianglelefteq G$

Twierdzenie. Abelowa $|G| = mn$, $(m,n) = 1 \Longrightarrow$ ist. $G_1, G_2 \leq G$ takie, że $G \cong G_1 \oplus G_2$, $|G_1| = m$, $|G_2| = n$.

Dd $G_1 = \{g \in G : m \cdot g = 0\}$, $G_2 = \{g \in G : ng = 0\}$

$(m,n) = 1$ $\quad \exists x,y : \; mx + n \cdot y = 1$ $\quad \mathbb{Z}$ $\quad G_1 \cap G_2 = 0$

$g \in G$ $\quad g = (mx+ny)g = \underbrace{mx \cdot g}_{\in G_2} + \underbrace{ny \cdot g}_{\in G_1}$

$\boxed{mng = 0}\ \forall g$

Ex. $Z_{mn} \cong Z_m \oplus Z_n$

Wn. abelowa $|G| = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ (p_i rożne liczby pierwsze) rozkłada się na sumę prostą swoich podgrup $G \cong G_1 \oplus \ldots \oplus G_m$, gdzie $|G_i| = p_i^{k_i}$ (p-grupy).

abelowa p-grupa, $|G| = p^k$???

Twierdzenie. abelowa $|G| = p^k$, $a \in G$ najwyższego rzędu $\Longrightarrow G \cong \langle a \rangle \oplus T$ dla pewnej $T \leq G$. (*dowód pomijamy*).

Twierdzenie. Każda skończona grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych.

Ex. Grupy abelowe rzędu 16 ???