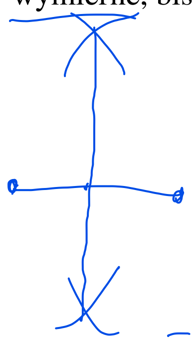
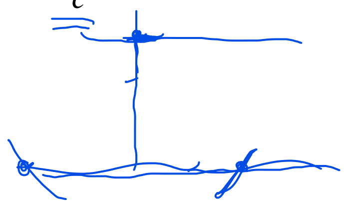
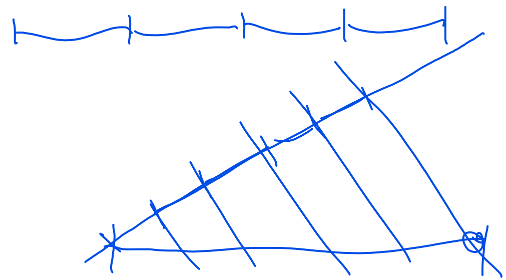
Wykład 11

Konstrukcje geometryczne

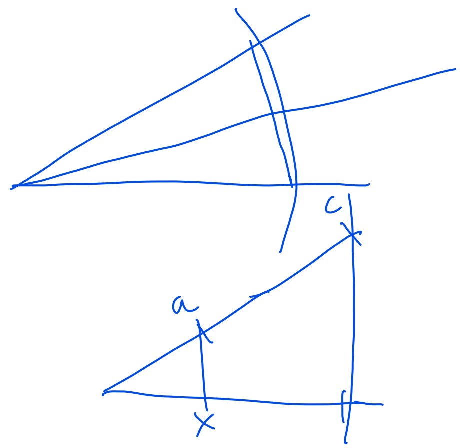
Cyrkiel i linijka: środek odcinka, prosta prostopadła, równoległa, wielokrotność, podział na *n*-części, liczby wymierne, bisekcja kąta, $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{a}$







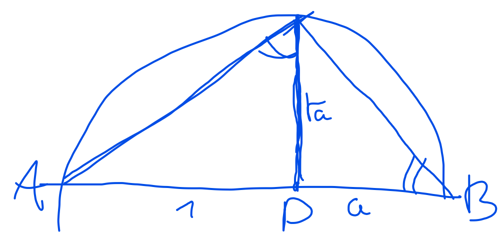
$\frac{n}{m}$

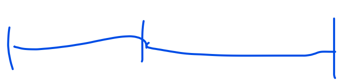


$\frac{ab}{c} = x$ $\qquad$ $\frac{a}{c} = \frac{x}{b}$

$\frac{a}{c}$, ab $\qquad$ $\sqrt{a}$

$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$





dodaw i odejmow

$\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$

$i\sqrt{3}$

DEFINICJA: Dane są punkty O i A na płaszczyźnie, których odległość wyznacza liczbę 1. Punkty, które można otrzymać z O i A przy pomocy konstrukcji cyrkla i linijki nazywamy **konstruowalnymi**, a ich współrzędne **liczbami konstruowalnymi**.

▨ (Wantzel 1837) Liczba a jest konstruowalna $\iff$ istnieje ciąg podciał $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n \ni a$$

$$\underline{\mathbb{Q} \subseteq K(a) \subseteq K_n}$$

2^n

taki że $a \in K_n$ oraz $[K_i : K_{i-1}] = 2$ dla $1 \le i \le n$.

$$v = \frac{+\beta \pm \sqrt{\beta^2+4\alpha}}{2}$$

a

Dowód

„⇐” Jeśli $K \supset F \supseteq \mathbb{Q}$ oraz $[K : F] = 2$, to $K = F(\sqrt{a})$ dla pewnego $a \in F$.

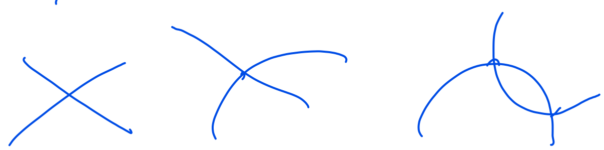
$[K:F] = 2$, baza $1, v$ $\quad \alpha + \beta v$

$v^2 = \alpha + \beta v$

$v^2 - \beta v - \alpha = 0$

$\{1, \sqrt{\beta^2+4\alpha}\}$

$K = F(\sqrt{\beta^2+4\alpha})$



$$\Rightarrow \begin{cases} xa + yb = c \\ xa_1 + yb_1 = c_1 \end{cases}$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

wz. Cramera $\pm, /, \cdot,$

$$\boxed{\frac{x-a}{y-b} = \frac{c-a}{d-b}} \qquad (a,b), (c,d)$$

$$\begin{cases} ax + by = c \longrightarrow y \\ (x-d)^2 + (y-e)^2 = f^2 \end{cases}$$

$Ax^2 + Bx + C = 0$ $\qquad x = \frac{-B \pm \sqrt{\ }}{2A}$

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{I} & (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \\ \mathrm{II} & (x-d)^2 + (y-e)^2 = f^2 \end{array} \iff \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{I} - \mathrm{II} \leftarrow \text{liniowe} \end{array}$$

WNIOSEK: Jeśli a jest konstruowalne, to $[K(a) : K] = 2^k$

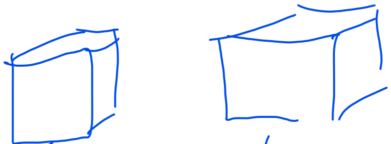
$\mathbb{Q}(Y)$

? 1

Podobnie: Punkty i liczby konstruowalne ze zbioru punktów, liczb Y; ciag rozszerzeń stopnia 2 począwszy od ciała $\mathbb{Q}(Y)$

Zagadnienia starożytności: podwojenie sześcianu, trysekcja kąta, kwadratura koła

I podw. sześcianu $\to$ a $\to$



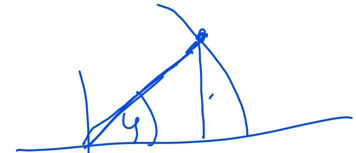
$b^3 = 2a^3$ $b = \sqrt[3]{2}\,a$

$\boxed{\sqrt[3]{2}}$ $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] \overset{?}{=}$ wiel. min. $x^3 - 2$

nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$

3 ↯

II Trysekcja kąta



$\varphi \to \varphi/3$ $\varphi \to \frac{\boxed{\cos\varphi}}{\sin\varphi} \to \boxed{\cos\frac{\varphi}{3}}$

$$\cos\varphi = \underset{\cos(3x)}{\cos 3\cdot\frac{\varphi}{3}} = 4\underbrace{\cos^3\frac{\varphi}{3}}_{x} - 3\underbrace{\cos\frac{\varphi}{3}}_{x}$$

$$4x^3 - 3x - \cos\varphi \;\Leftarrow\; \text{pierw.} \in (\underbrace{\mathbb{Q}(\cos\varphi)}_{\mathbb{Q}.})(x)$$

Dla $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ pierw. $\mathbb{Q}(x)$

☒ nierozkł. nad $\mathbb{Q}$ $8x^3 - 6x - 1 \leftarrow \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

☒ Trysekcja $\frac{\pi}{3}$ jest niemożliwa (cyrkiel, linijka).

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ – OK $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $4x^3 - 3x = 0$

III Kwadratura koła

$[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] = \infty$

Lindemann – [illegible]

$a\pi^2 + b\pi + c = 0$?

$\pi^2 + b\pi + c = 0$

$\pi^2 + b\pi = -c$

$\pi(\pi + b) = -c$?

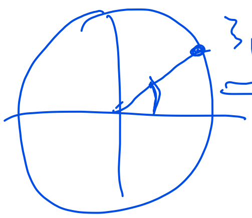
$\boxed{\pi^2 = b\pi + c}$?

Konstrukcja n-kąta foremenego

▨ (Wantzel-Gauss) Dla liczby pierwszej p, p-kąt foremny jest konstruowalny tylko wtedy gdy $p = F_n = 2^{2^n} + 1$ jest liczbą pierwszą Fermata.

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$
$F_4 = \dots$

D-d konstruowalny $\Rightarrow$ $p = F_n$



$\zeta_p = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$

$[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{p}) : \mathbb{Q}] = 2^r$

$[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = 2^k$ $\Leftrightarrow$
$= p-1$

$w = i\sin\frac{2\pi}{p}$: $k = 2$
$w^2 = -\sin^2\frac{2\pi}{p}$
$1 - w^2 = \cos^2\frac{2\pi}{p}$

$\zeta_p : \frac{x^p - 1}{x-1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$
nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ Kryt. Eisenst.

$\Rightarrow p = 2^k + 1 \Rightarrow p = 2^{2^r} + 1$
r potęga

bo gdyby k-nieparzyste
$(x^{2n+1} + 1) = (x+1)(\dots)$

▨ Ogólnie: $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m$, gdzie $p_1 p_2 \dots p_m$ różne liczby pierwsze Fermata.

3, 5, 17,
6, 10, 15

$\Leftrightarrow$

$F_4 = 2^{2^4} + 1$

Liczby Fermata $F_n = 3, 5, 17, 257, 65537$ są pierwsze, kolejne złożone do F_{32}, a dalej otwarte…

F_5 – złożona

F_{33} ?

?